Untersuchungen über die Grundlagen der pcf-Theorie von Saharon Shelah

Dem Fachbereich Mathematik
der Universität Hannover vorgelegte

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften,
Dr. rer. nat.,

von Dipl.-Math. Edmund Weitz,
geboren am 23.12.65 in Peine.

Januar 1996

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Zu den wichtigsten Problemen der Mengenlehre in diesem Jahrhundert gehörten die, die sich mit der Exponentiation von Kardinalzahlen befaßten. Die älteste, schon von Cantor 1883 aufgeworfene Frage war die, ob die Mächtigkeit des Kontinuums die kleinste überabzählbare Kardinalität ist. Verallgemeinert wird diese Vermutung durch die Frage, ob die *allgemeine Kontinuumshypothese* (GCH)

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

aus den Axiomen der Mengenlehre (ZFC) folgt.
Gödels Untersuchung des konstruktiblen Universums (1938) und Cohens Forcing-Methode (1963) zeigten schließlich, daß GCH in ZFC weder beweisbar noch widerlegbar ist. Easton zeigte 1964 sogar noch mehr — nämlich, daß man, ohne einen Widerspruch zu ZFC zu erhalten, den Verlauf der Kontinuumsfunktion 2^κ für reguläre κ beliebig vorschreiben kann, wenn man dabei nur beachtet, daß diese Funktion monoton sein muß und den Satz von König nicht verletzen darf. (Die genaue Formulierung dieses Resultates findet sich z.B. in [Je1, p. 192–197].)
Silver zeigte 1973, daß sich das Resultat von Easton *nicht* auf singuläre Kardinalzahlen verallgemeinern läßt. Mit anderen Worten: Die Kontinuumsfunktion gehorcht auf singulären Werten außer der Monotonie und dem Satz von König noch weiteren Gesetzen. Die Suche nach einem Regelwerk, das das Verhalten dieser Funktion vollständig beschreibt, ist noch nicht abgeschlossen. (Dies ist das sogenannte *Singular Cardinals Problem.*)
Die Resultate von Silver und die kurz danach bewiesenen Sätze von Galvin und Hajnal, die in dieselbe Richtung wiesen, galten nur für singuläre Kardinalzahlen von überabzählbarer Kofinalität. Die ersten Ergebnisse über Werte mit abzählbarer Kofinalität lieferte Saharon Shelah, darunter sehr überraschende wie z.B.

$$(\forall n < \omega\ 2^{\aleph_n} < \aleph_\omega) \implies 2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}.$$

Shelah benutzte zum Beweis seiner Sätze eine starke Verallgemeinerung der Methoden von Galvin und Hajnal, die inzwischen als „pcf-Theorie“ bekannt geworden ist und bereits Anwendungen auch in anderen Bereichen der Mathematik (etwa Topologie und Modelltheorie) fand.

Shelah schlägt vor (z.B. [Sh5, xiii]), statt der klassischen Kardinalzahlarithmetik die Untersuchung der pcf-Struktur zu betreiben, da diese offenbar wesentlich schwieriger durch Forcing zu verändern ist als etwa die Kontinuumsfunktion. Allerdings sind alle bisherigen Darstellungen der Theorie (besonders erwähnenswert sind hier [BM] und Shelahs Buch [Sh5]) sehr anwendungsorientiert, die vorgestellten Begriffe werden häufig nur soweit entwickelt und untersucht, wie es für die jeweilige Fragestellung notwendig ist. In dieser Arbeit versuche ich, mich von den intendierten Anwendungen zu lösen und stattdessen bestimmte pcf-Theoreme zu verallgemeinern oder die Motivation für das Definieren bestimmter Begriffe genauer zu untersuchen. Häufig führt dies wiederum zu klareren Darstellungen und einfacheren Beweisen innerhalb der bereits bekannten Theorie.
Im dritten Kapitel untersuchen wir zunächst Produkte *beliebiger* Ordinalzahlen, während sich die pcf-Theorie im allgemeinen auf Produkte regulärer Kardinalzahlen beschränkt. In den ersten beiden Abschnitten definieren wir die wichtigsten Begriffe, zeigen einige einfache Konsequenzen der Existenz der „wahren Kofinalität" und geben ein allgemeines Transferprinzip an, das dazu dient, Kofinalitäten auf andere Produkte zu übertragen. Im dritten Abschnitt übernehmen wir aus [Je3] den Begriff der „γ-rapiden" Folgen und zeigen, wie wir mit ihrer Hilfe den Hauptsatz der pcf-Theorie verallgemeinern und sehr einfach beweisen können. Ein ähnliches Verfahren werden wir noch einmal in Abschnitt 7.3 anwenden, um einen Darstellungssatz der pcf-Theorie zu beweisen.
Im vierten Kapitel gehen wir dann über zu Produkten über progressive Mengen regulärer Kardinalzahlen. Das wesentliche Thema ist hier das Ideal $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$. Nach der Definition des pcf-Operators führen wir die „λ-mächtigen" und die „λ-gerichteten" Ideale ein und zeigen verschiedene Möglichkeiten, das Ideal $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ zu charakterisieren. Diese Untersuchungen führen (zusammen mit den Methoden aus dem dritten Kapitel) im dritten Abschnitt dieses Kapitels zu einem neuen, kombinatorischen Beweis der Existenz eines Maximums von $\mathrm{pcf}(a)$.
Im fünften Kapitel stellen wir die Menge $\mathrm{H}(\Theta)$ vor und entwickeln den bekannten Begriff der Absolutheit von Formeln weit genug, um das wesentliche Beweisprinzip in Shelahs $\mathrm{H}(\Theta)$-Methode anhand dreier Beispiele vorstellen zu können. Im dritten Abschnitt des Kapitels führen wir den Begriff der „charakterisierenden Folgen" ein und zeigen, wie diese Folgen die Ordinalzahlabschnitte bestimmter

Strukturen determinieren. Der vierte Abschnitt macht die Bedeutung einer Wohlordnung auf H(Θ) für die Eindeutigkeit der Skolem-Hülle klar und zeigt damit, daß wir Erweiterungen an elementaren Unterstrukturen von H(Θ) vornehmen können, ohne ihre charakteristischen Funktionen zu sehr zu verändern. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels geht kurz auf die kombinatorischen Grundlagen der H(Θ)-Methodik ein und deutet an, daß man gegebenenfalls auch auf sie verzichten könnte — dafür aber einiges an Eleganz und Kürze verlöre.
Im folgenden Kapitel stellen wir einen Satz aus [Sh5] vor, der zeigt, wie man mit Hilfe von „Kontrollfunktionen" die charakteristischen Funktionen bestimmter Unterstrukturen von H(Θ) vorherbestimmen kann. Wir benutzen diese Kontrollfunktionen zusammen mit unseren charakterisierenden Folgen aus dem fünften Kapitel, um neue, kurze Beweise für zwei Abschätzungssätze der pcf-Theorie anzugeben. Im zweiten Abschnitt zitieren wir außerdem ein Resultat über die Struktur von pcf(a), das für das letzte Kapitel benötigt wird.
Im siebten Kapitel versuchen wir, uns von progressiven Grundmengen zu lösen. Im ersten Abschnitt stellen wir „schwach progressive" Mengen vor und zeigen, daß die pcf-Theorie auch auf diese Mengen anwendbar ist. Im zweiten Abschnitt betrachten wir, einem Ansatz von Shelah folgend, Grundmengen, die gewissermaßen „noch weniger als schwach progressiv" sind, die aber dafür von der Form pcf(a), a progressiv, sind. Auch hier ist ein Großteil der Theorie anwendbar. Zum Schluß beweisen wir Shelahs Resultat über die Länge von Intervallen in pcf(a) in allgemeiner Form. Durch den Lokalisierungssatz aus dem zweiten Abschnitt und die Verallgemeinerung eines Ergebnisses aus [Je2] wird der Beweis sehr einfach und klar.

Herrn Prof. Dr. Karsten Steffens danke ich besonders für die Betreuung während der Zeit des Entstehens dieser Dissertation. Mit Anregungen und kritischem Hinterfragen in vielen Gesprächen und Diskussionen unterstützte er mich in meinem Vorgehen. Ebenso danke ich Dr. Michael Holz für kollegiale Zusammenarbeit und konstruktive Kritik sowie Prof. Dr. Saharon Shelah für zwei produktive Gespräche in Halle bzw. Haifa und für die Hinweise, die er mir per E-Mail übermittelte (s. Anhang).

2 Mengentheoretische Schreibweisen

Die hier verwendeten Schreibweisen und Symbole entsprechen im allgemeinen denen aus [Je1]. Auf einige Abweichungen werden wir im folgenden eingehen. (Alle in dieser Arbeit definierten Symbole und Begriffe finden sich in einem Index am Ende des Textes wieder.)
Wir bezeichnen mit ON die Klasse der Ordinalzahlen und mit CN die Klasse der Kardinalzahlen. V sei die Allklasse.
Ist $\kappa = \aleph_\alpha$ eine unendliche Kardinalzahl, so sei $\kappa^{+\beta} := \aleph_{\alpha+\beta}$ für $\beta \in \mathrm{ON}$. Ist A eine Menge von unendlichen Kardinalzahlen, so setzen wir

$$A^{+\beta} := \{\kappa^{+\beta} : \kappa \in A\}.$$

Statt A^{+1} schreiben wir kürzer A^+.
Ist α eine Ordinalzahl, so sei

$$\mathrm{cf}(\alpha) := \min\{|x| : x \subseteq \alpha \wedge \sup x = \sup \alpha\}.$$

Damit ist die Kofinalität auch für Nachfolgerzahlen definiert, und es gilt $\mathrm{cf}(0) = 0$ und $\mathrm{cf}(\alpha+1) = 1$ für alle α. Eine Ordinalzahl α heißt **regulär**, wenn sie *unendlich* ist und wenn $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ gilt. 0 und 1 sind also *nicht* regulär.
Eine Funktion f von einer Ordinalzahl in ON heißt **Normalfunktion** oder **Normalfolge**, wenn sie stetig und streng monoton ist. f heißt **kofinal in** α, wenn f eine Normalfunktion und $\mathrm{Wb}(f)$ eine unbeschränkte Teilmenge von α ist.
Sind α, β Ordinalzahlen, so setzen wir

$$[\alpha, \beta)_{\mathrm{ON}} := \{\gamma \in \mathrm{ON} : \alpha \leq \gamma < \beta\}$$
$$[\alpha, \beta)_{\mathrm{CN}} := \{\gamma \in \mathrm{CN} : \alpha \leq \gamma < \beta\}$$
$$[\alpha, \beta)_{\mathrm{reg}} := \{\gamma \in \mathrm{ON} : \alpha \leq \gamma < \beta \wedge \gamma \text{ regulär}\}$$

Analog werden $[\alpha, \beta]_{\mathrm{ON}}$, $(\alpha, \beta]_{\mathrm{ON}}$ etc. definiert. Ein **Intervall regulärer Kardinalzahlen** ist eine Menge der Form $[\alpha, \beta)_{\mathrm{reg}}$ für gewisse $\alpha, \beta \in \mathrm{ON}$.
Ist A eine Menge, so bezeichnet $\prod A$ wie üblich die Menge der Auswahlfunktionen für A, d.h.

$$\prod A := \{f : f \text{ Funktion} \wedge \mathrm{Db}(f) = A \wedge \forall a \in A\ f(a) \in a\}.$$

Ist $A \subseteq \mathrm{CN}$, so steht $\prod A$ auch für das unendliche Produkt der Kardinalzahlen in A. Die jeweilige Bedeutung sollte jedoch immer aus dem Kontext hervorgehen. Die Menge aller Funktionen von A in B bezeichnen wir mit ${}^{A}B$. Die **Identität auf** A ist die Funktion

$$\mathrm{id}_A := \{(a, a) : a \in A\}.$$

Ist A eine Menge von Ordinalzahlen, so ist $\mathrm{otp}(A)$, der **Ordnungstyp** von A, die eindeutig bestimmte Ordinalzahl, die bzgl. $\in$ isomorph zu A ist.

3 Ordinalfunktionen

3.1 Reduktion von Relationen auf ein Ideal

Im folgenden sei A eine nichtleere Menge und I ein **Ideal** auf A, d.h. eine nichtleere Menge von Teilmengen von A, die A nicht enthält und abgeschlossen ist gegen endliche Vereinigungen und gegen Inklusion. Wir betrachten ein Ideal I auf A als Maß für die Größe einer Menge — Elemente von I sind Teilmengen von A, die so klein sind, daß man sie vernachlässigen kann: Wir sagen, daß $\varphi(a)$ für **fast alle** $a \in A$ **modulo** I gilt, wenn

$$\{a \in A : \neg\varphi(a)\},$$

also die Menge der Ausnahmen, ein Element von I ist. Den Zusatz „modulo I" und auch andere Verweise auf das Ideal I werden wir später häufig weglassen, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, auf welches Ideal wir uns beziehen. Die Elemente von

$$I^+ := \{B \subseteq A : B \notin I\}$$

bezeichnen wir als die I**-positiven** Mengen (weil sie im Gegensatz zu den Idealmengen ein echt positives „Maß" haben).

Ein Beispiel für diese Bezeichnungsweise ist „$B \subseteq_I C$" bzw. „B ist Teilmenge von C modulo I", wobei B und C Teilmengen von A sind. Dies soll bedeuten, daß für fast alle $a \in A$ modulo I die Implikation $a \in B \implies a \in C$ gilt.

Hauptsächlich interessiert uns diese Sichtweise modulo eines Ideals jedoch in Produkten von Strukturen, speziell in Produkten von Ordinalzahlen mit der üblichen Wohlordnung. Sind f und g Funktionen von A in ON, so schreiben wir $f <_A g$ (oder einfach $f < g$, falls klar ist, welche Grundmenge gemeint ist), wenn f auf A *punktweise* kleiner als g ist, d.h. wenn $f(a) < g(a)$ für *alle* $a \in A$ gilt. Wir sagen, daß f modulo I kleiner als g ist, in Zeichen $f <_I g$, wenn f fast überall modulo I kleiner als g ist, wenn also

$$\{a \in A : \neg(f(a) < g(a))\}$$

eine Idealmenge ist. Solche Funktionen f nennen wir auch **Ordinalfunktionen auf** A, und lassen den Zusatz „auf A" weg, wenn klar ist, welche Grundmenge gemeint ist.

Im folgenden tragen wir die wichtigsten Definitionen und einige grundlegende Eigenschaften zusammen:
Sei A eine nichtleere Menge, und sei I ein Ideal auf A. Ferner seien B und C Teilmengen von A und f und g Ordinalfunktionen auf A. Dann setzen wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(f,g) &:= \{a \in A : f(a) < g(a)\},\\
\mathrm{B}[f,g] &:= \{a \in A : f(a) \leq g(a)\},\\
B \subseteq_I C &:\iff B \setminus C \in I,\\
B =_I C &:\iff (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \in I,\\
f =_I g &:\iff \{a \in A : f(a) \neq g(a)\} \in I,\\
f \leq_I g &:\iff \mathrm{B}(g,f) \in I,\\
f <_I g &:\iff \mathrm{B}[g,f] \in I \text{ und}\\
f \lneqq_I g &:\iff (f \leq_I g) \wedge \neg(f =_I g).
\end{aligned}$$

Bemerkung. Die zuletzt definierte Relation $\lneqq_I$ fällt dabei etwas aus dem Rahmen, da hier nicht eine Eigenschaft fast überall gilt, sondern nur auf einer I-positiven Menge. Aus Gründen, die weiter unten erläutert werden, nehmen wir sie jedoch mit auf.

Lemma 3.1. *Sei A eine nichtleere Menge und I ein Ideal auf A. Für alle Teilmengen B, C und D von A gilt dann:*

(i) $B =_I B$

(ii) $B =_I C \implies C =_I B$

(iii) $B =_I C \wedge C =_I D \implies B =_I D$

(iv) $B = C \implies B =_I C$

(v) $B \subseteq_I B$

(vi) $B \subseteq_I C \wedge C \subseteq_I D \implies B \subseteq_I D$

(vii) $B \subseteq C \implies B \subseteq_I C$

(viii) $B =_I C \iff B \subseteq_I C \wedge C \subseteq_I B$

(ix) $B \subseteq_I C \implies A \setminus C \subseteq_I A \setminus B$

(x) $B \subseteq_I C \wedge C \in I \implies B \in I$

Lemma 3.2. *Sei A eine nichtleere Menge und I ein Ideal auf A. Für alle Ordinalfunktionen f, g und h auf A gilt dann:*

(i) $f =_I f$

(ii) $f =_I g \implies g =_I f$

(iii) $f =_I g \wedge g =_I h \implies f =_I h$

(iv) $f = g \implies f =_I g$

(v) $f \leq_I f$

(vi) $f \leq_I g \wedge g \leq_I f \implies f =_I g$

(vii) $f \leq_I g \wedge g \leq_I h \implies f \leq_I h$

(viii) $f \leq g \implies f \leq_I g$

(ix) $f \lneqq_I g \iff \mathrm{B}(f, g) \in I^+$

(x) $\neg(f <_I f)$

(xi) $f <_I g \wedge g <_I h \implies f <_I h$

(xii) $f < g \implies f <_I g$

(xiii) $f <_I g \implies f \lneqq_I g$

(xiv) $f \lneqq_I g \implies f \leq_I g$

(xv) $f \leq_I g \wedge g \lneqq_I h \implies f \lneqq_I h$

(xvi) $f \leq_I g \wedge g <_I h \implies f <_I h$

Bemerkung. Man beachte, daß $\subseteq_I$ und $\leq_I$ keine Halbordnungen sind; die Antisymmetrie gilt nur modulo I. Ebenso gilt *nicht* die Beziehung

$$f <_I g \iff (f \leq_I g) \wedge \neg(f =_I g).$$

(Dies ist der Grund für die Definition von $\lneqq_I$.)
Dieses Problem könnte man vermeiden, wenn man – wie in der Modelltheorie oder in der Algebra üblich – reduzierte Produkte betrachten würde. Die hier vorgeschlagene Vorgehensweise ist jedoch wesentlich praktischer für unsere Vorhaben.

Ein Ideal J **erweitert** ein Ideal I, wenn $I \subseteq J$ ist.

Lemma 3.3. *Sei A eine nichtleere Menge, I ein Ideal auf A und J ein Ideal auf A, das I erweitert. Ist $\varphi(x)$ eine Formel und gilt $\varphi(a)$ für fast alle $a \in A$ modulo I, so gilt dies auch modulo J.*

Bemerkung. Damit „vererben" sich die oben definierten Relationen $=_I$, $\subseteq_I$, $\leq_I$ und $<_I$ auf Erweiterungen J. Dies gilt jedoch im allgemeinen *nicht* für $\lneqq_I$.

Ist M eine Teilmenge von $\mathcal{P}(A)$ mit $\bigcup M' \neq A$ für jede endliche Teilmenge M' von M, so gibt es ein kleinstes Ideal auf A oberhalb von M, das wir mit $\langle M \rangle$ bezeichnen. Wir sagen, daß $\langle M \rangle$ das Ideal ist, das **von** M **erzeugt wird**. Insbesondere gilt:

Lemma 3.4. *Ist A eine nichtleere Menge, I ein Ideal auf A und B eine Teilmenge von A, so gilt: Es gibt genau dann ein Ideal J auf A mit $I \subseteq J$ und $B \in J$, wenn $A \setminus B \notin I$ ist (d.h. wenn $\neg(B =_I A)$ gilt).*

In diesem Fall existiert $I[B] := \langle I \cup \{B\} \rangle$. Wir sagen, daß B das Ideal $I[B]$ **über** I **erzeugt**. Ist B I-positiv, gilt also $\neg(A \setminus B =_I A)$, so existiert das Ideal $I[A \setminus B]$, das wir mit $I \restriction B$ bezeichnen. Es ist dann auch $I \cap \mathcal{P}(B)$ ein Ideal auf B. Das folgende Lemma stellt einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Idealen her:

Lemma 3.5. *Sei A eine nichtleere Menge, I ein Ideal auf A und $B \in I^+$. Sind f und g Ordinalfunktionen auf A, so gilt:*

$$f <_{(I \restriction B)} g \iff f \restriction B <_{(I \cap \mathcal{P}(B))} g \restriction B.$$

Diese Aussage gilt analog auch für die Relationen $=$ und $\leq$.

Bemerkung. Ersetzen wir also I durch ein Ideal der Form $I \restriction B$, so reden wir weiterhin über Funktionen, die auf ganz A definiert sind, interessieren uns jedoch nur noch für ihre Werte auf B.

Wir führen eine weitere abkürzende Schreibweise ein: Sind f und g Funktionen von der Menge A in ON und ist $B \subseteq A$, so setzen wir

$$f =_B g :\Longleftrightarrow \forall a \in B\ f(a) = g(a).$$

Analog werden $\leq_B$ und $<_B$ definiert.

Ferner definieren wir das *punktweise Supremum* einer Menge S von Ordinalfunktionen auf A als die Funktion $\sup S : A \longrightarrow \mathrm{ON}$ mit

$$(\sup S)(a) := \sup\{f(a) : f \in S\}$$

für alle $a \in A$. Analog werden $\max S$ (für endliche S) und $\min S$ definiert. Schließlich sei $f + 1$ die durch

$$(f + 1)(a) := f(a) + 1$$

für $a \in A$ definierte Ordinalfunktion.

Alles, was in diesem Abschnitt für Ideale definiert wurde, läßt sich ganz analog auch für Filter definieren, wenn man jeweils zum dualen Ideal übergeht. Ist z.B. F ein Filter auf A, so gilt

$$f <_F g \Longleftrightarrow \{a \in A : f(a) < g(a)\} \in F.$$

Ist I maximal, so sind die Relationen $\leq_I$ und $<_I$ linear modulo I. Formuliert man dies mit Hilfe von Filtern, so erhält man das folgende Lemma:

Lemma 3.6. *Sei A eine nichtleere Menge und D ein Ultrafilter auf A. Sind f und g Ordinalfunktionen auf A, so gilt:*

(i) $(f \leq_D g) \vee (g \leq_D f)$

(ii) $(f <_D g) \vee (f =_D g) \vee (g <_D f)$

(iii) $(f <_D g) \Longleftrightarrow (f \lneqq_D g)$

Wir werden häufig Ultrafilter statt maximaler Ideale betrachten und erwähnen daher die folgende Beziehung: Ist D ein Ultrafilter auf A und I ein Ideal auf A mit $D \cap I = \emptyset$, so ist I Teilmenge des zu D dualen maximalen Ideals. Dies rechtfertigt die Sprechweise „D erweitert I“ für $D \cap I = \emptyset$.

3.2 Suprema und Kofinalität

Für den Rest des Kapitels sei stets A eine nichtleere Menge und I ein Ideal auf A. Sofern er nicht explizit angegeben ist, sei der Definitionsbereich von Ordinalfunktionen immer A.

Ist S eine Menge von Ordinalfunktionen und h ebenfalls eine Ordinalfunktion, so heißt h **obere Schranke von S modulo I**, wenn $f \leq_I h$ für alle $f \in S$ gilt. h heißt **Supremum von S modulo I**, wenn h obere Schranke von S modulo I ist und $h \leq_I g$ für jede weitere obere Schranke g gilt. Ist $T \subseteq S$, so heißt T **unbeschränkt in S modulo I**, wenn kein Element von S obere Schranke von T ist.

Bemerkung. Wegen der fehlenden Antisymmetrie von $\leq_I$ sind Suprema nicht eindeutig bestimmt. Allerdings sind *modulo I* alle Suprema von S gleich.

Eine einfache notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Suprema liefert das folgende Lemma:

Lemma 3.7. *Sei S eine Menge von Ordinalfunktionen. Eine Ordinalfunktion g ist genau dann Supremum von S, wenn g obere Schranke von S ist und keine obere Schranke h von S mit $h \lneqq_I g$ existiert.*

Beweis. Sei g obere Schranke von S derart, daß keine obere Schranke $h \lneqq_I g$ von S existiert. Wäre g nicht ein Supremum von S, so gäbe es eine obere Schranke h mit $\neg(g \leq_I h)$. Sei $p := \min\{g, h\}$. Offenbar ist p obere Schranke von S, und nach Konstruktion gilt $p \leq g$. Ferner ist sicher $\mathrm{B}(p, g) = \mathrm{B}(h, g)$. Da $g \leq_I h$ nicht gilt, kann $g \leq_I p$ also auch nicht gelten. Es folgt somit $p \lneqq_I g$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
Die andere Richtung ist offenbar trivial. ■

Ist S eine Menge von Ordinalfunktionen und $T \subseteq S$, so heißt T **kofinal in S modulo I**, wenn für alle $f \in S$ ein $g \in T$ mit $f \leq_I g$ existiert. Wir definieren die **Kofinalität von S modulo I** durch

$$\mathrm{cf}(S/I) := \min\{|T| : T \text{ kofinale Teilmenge von } S \text{ modulo } I\}.$$

Diese Definition ist sinnvoll, da sicher immer S kofinal in S ist.

Eine Folge $(f_\alpha : \alpha < \sigma)$ von Ordinalfunktionen heißt **monoton steigend** bzw. **streng monoton steigend modulo** I, wenn $f_\alpha \leq_I f_\beta$ bzw. $f_\alpha <_I f_\beta$ für alle $\alpha < \beta < \sigma$ gilt. Ist S eine Menge von Ordinalfunktionen und $(f_\alpha : \alpha < \sigma)$ eine Folge von Elementen von S, so heißt diese Folge **kofinal in** S **modulo** I, wenn sie modulo I streng monoton steigt und ihr Wertebereich $\{f_\alpha : \alpha < \sigma\}$ kofinal in S liegt. Wenn es so eine Folge gibt, so definieren wir die **wahre Kofinalität** (**t***rue* **c**o**f***inality*) **von** S **modulo** I durch

$$\mathrm{tcf}(S/I) := \min\{\sigma : \sigma \text{ ist die Länge einer modulo } I \text{ kofinalen Folge in } S\}.$$

Ist I das triviale Ideal $\{\emptyset\}$ (sind also $<_I$ und $\leq_I$ die punktweisen Relationen $<_A$ und $\leq_A$), so schreiben wir einfach $\mathrm{cf}(S)$ bzw. $\mathrm{tcf}(S)$.
$f \in S$ heißt **maximales Element von** S **modulo** I, falls kein $h \in S$ mit $f \lneqq_I h$ existiert.

Bemerkung. Die wahre Kofinalität muß nicht immer existieren (z.B. wenn S modulo I zwei maximale Elemente besitzt, die auf einer positiven Menge überall verschieden sind). Benutzen wir die Schreibweise $\mathrm{tcf}(S/I) = \lambda$, so soll dies daher immer implizieren, daß S kofinale Folgen modulo I besitzt, die wahre Kofinalität also definiert ist.

Ist f eine Ordinalzahlfunktion auf A, so setzen wir

$$\prod f := \prod_{a \in A} f(a).$$

Offenbar gilt $g < f$ genau dann, wenn $g \in \prod f$ ist. Liegt eine Folge kofinal in $\prod f$, so sagen wir auch, daß sie **kofinal in** f liegt.

Lemma 3.8. *Sei S eine Menge von Ordinalfunktionen, die eine kofinale Folge besitzt, und $\lambda := \mathrm{tcf}(S/I)$. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{cf}(\lambda) = \lambda$

(ii) *Es ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn $S = \emptyset$ ist.*

(iii) *Es ist $\lambda = 1$ genau dann, wenn S ein Maximum bzgl. $\leq_I$ besitzt.*

Beweis. Die Aussagen (ii) und (iii) sind offensichtlich. Sei $(f_\alpha : \alpha < \sigma)$ kofinal in S. Wir wählen eine Folge $(\alpha_i : i < \mathrm{cf}(\sigma))$, die kofinal in σ ist. Dann ist $(f_{\alpha_i} : i < \mathrm{cf}(\sigma))$ offenbar auch kofinal in S. Das beweist (i). ■

Das nächste Lemma besagt insbesondere, daß wir die wahre Kofinalität bereits kennen, wenn wir *eine* kofinale Folge regulärer Länge gefunden haben:

Lemma 3.9. *Sei S eine Menge von Ordinalfunktionen, und seien $(f_\alpha : \alpha < \sigma)$ und $(g_\beta : \beta < \tau)$ kofinale Folgen in S. Gilt $\mathrm{cf}(\sigma) = \sigma$ und $\mathrm{cf}(\tau) = \tau$, so ist $\sigma = \tau$.*

Beweis. Nach Lemma 3.8 können wir o.B.d.A. annehmen, daß σ und τ unendlich sind. Angenommen, es ist etwa $\sigma < \tau$. Wir wählen für alle $\alpha < \sigma$ ein $\beta_\alpha < \tau$ mit $f_\alpha \leq_I g_{\beta_\alpha}$. Da τ regulär ist, ist $\beta := \sup\{\beta_\alpha : \alpha < \sigma\}$ kleiner als τ, also nach Konstruktion

$$f_\alpha <_I f_{\alpha+1} \leq_I g_{\beta_{\alpha+1}} \leq_I g_\beta$$

für alle $\alpha < \sigma$. Dies widerspricht der Kofinalität der ersten Folge. ■

Lemma 3.10. *Ist λ eine Limeszahl und $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine streng monotone Folge von Ordinalfunktionen, die kofinal in der Ordinalfunktion f liegt, so ist f ein Supremum dieser Folge.*

Beweis. Sicher ist f obere Schranke der Folge, da alle Folgenglieder nach Definition Elemente von $\prod f$ sind.
Angenommen, es existiert eine obere Schranke f' dieser Folge mit $f' \lneqq_I f$. $X := \mathrm{B}(f', f)$ ist also positiv. Wir definieren die Ordinalfunktion f^* durch

$$f^*(a) := \begin{cases} f'(a) & a \in X \\ 0 & a \notin X \end{cases}$$

für $a \in A$. Wegen $\prod f \neq \emptyset$ ist $f(a) \neq 0$ für alle $a \in A$, also $f^* \in \prod f$. Nach Voraussetzung existiert ein $\alpha < \lambda$ mit $f^* \leq_I f_\alpha <_I f_{\alpha+1}$. Es ist

$$X \setminus \mathrm{B}[f_{\alpha+1}, f^*] \subseteq \mathrm{B}(f', f_{\alpha+1})$$

und $X \setminus \mathrm{B}[f_{\alpha+1}, f^*]$ positiv, also $f' \lneqq_I f_{\alpha+1}$ im Widerspruch zur Wahl von f'. ■

Ein einfaches Beispiel, das wir später noch benutzen werden, liefert das folgende Lemma:

Lemma 3.11. *Ist X eine Menge und α eine Ordinalzahl mit $\mathrm{cf}(\alpha) > |X|$, so ist $\mathrm{tcf}({}^X\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.*

Beweis. Wir wählen eine Folge $(\alpha_i : i < \mathrm{cf}(\alpha))$, die kofinal in α ist. Für $i < \mathrm{cf}(\alpha)$ sei f_i die Ordinalfunktion auf X, die konstant den Wert α_i hat.
Ist $f \in {}^X\alpha$ beliebig, so ist $\gamma := \sup \mathrm{Wb}(f) < \alpha$ nach Voraussetzung, also gibt es ein $i < \mathrm{cf}(\alpha)$ mit $\gamma \leq \alpha_i$ und damit $f \leq_X f_i$.
Die Folge $(f_i : i < \mathrm{cf}(\alpha))$ ist also offenbar kofinal, und nach Lemma 3.9 sind wir fertig. ■

Eine weitere Klasse von Beispielen liefern die maximalen Ideale bzw. die Ultrafilter:

Lemma 3.12. *Ist D ein Ultrafilter auf A und S eine Menge von Ordinalfunktionen, so besitzt S modulo D eine kofinale Folge und es ist* $\mathrm{cf}(S/D) = \mathrm{tcf}(S/D)$.

Beweis. Sei T eine kofinale Teilmenge von S der Mächtigkeit $\mathrm{cf}(S/D)$. Wir definieren rekursiv eine modulo D streng monotone Folge von Elementen von T:
Sei $\sigma \in \mathrm{ON}$ und $(f_\alpha : \alpha < \sigma)$ bereits definiert. Ist diese Folge noch nicht kofinal, so finden wir ein $g \in S$ mit $\neg(g \leq_D f_\alpha)$ für alle $\alpha < \sigma$. Nach Lemma 3.6 ist $f_\alpha <_D g$ für alle $\alpha < \sigma$. Wir wählen ein $f_\sigma \in T$ mit $g \leq_D f_\sigma$.
Da streng monotone Folgen injektiv sind, muß die Definition bei einem $\sigma \in \mathrm{ON}$ abbrechen. Nach Konstruktion ist die so entstandene Folge der Länge σ natürlich kofinal. Da die Folgenglieder in T liegen, ist $\sigma \leq \mathrm{cf}(S/D)$, also $\mathrm{tcf}(S/D) \leq \mathrm{cf}(S/D)$. Umgekehrt gilt jedoch auch $\mathrm{cf}(S/D) \leq \mathrm{tcf}(S/D)$, da der Wertebereich jeder kofinalen Folge eine kofinale Menge ist. ■

Wenn wir mit Ultrafiltern arbeiten, werden wir häufig die Schreibweise „cf“ statt „tcf“ benutzen. Mit Hilfe der Lemmata 3.3, 3.5 und 3.9 erhalten wir noch die folgenden wichtigen Beziehungen:

Lemma 3.13. *Sei S eine Menge von Ordinalfunktionen, so daß* $\mathrm{tcf}(S/I)$ *existiert. Ist J ein Ideal auf A mit $I \subseteq J$, so existiert auch* $\mathrm{tcf}(S/J)$ *und die beiden Werte sind gleich.*

Lemma 3.14. *Sei S eine Menge von Ordinalfunktionen, X eine positive Menge und*

$$S' := \{f \restriction X : f \in S\}.$$

Existiert einer der beiden Werte $\mathrm{tcf}(S/(I \restriction X))$ *und* $\mathrm{tcf}(S'/(I \cap \mathcal{P}(X)))$*, so existiert auch der andere und die beiden sind gleich.*

Bemerkung. Ist D ein Ultrafilter auf A und $X \in D$, so gilt $D \restriction X = D$. Wenden wir obiges Lemma an, so folgt

$$\mathrm{cf}(S/D) = \mathrm{cf}(S'/(D \cap \mathcal{P}(X))).$$

($D \cap \mathcal{P}(X)$ ist dann natürlich ein Ultrafilter auf X.)

Mit dem Begriff der wahren Kofinalität eng verwandt ist der folgende: Ist S eine Menge von Ordinalfunktionen auf A und λ eine Kardinalzahl, so ist S λ-**gerichtet modulo** I, wenn für alle $T \subseteq S$ mit $|T| < \lambda$ ein $f \in S$ mit $g <_I f$ für alle $g \in T$ existiert.

Lemma 3.15. *Sei f eine Ordinalfunktion, so daß* $\lambda = \mathrm{tcf}(\prod f/I)$ *unendlich ist. Dann ist* $\prod f$ *modulo I λ-gerichtet und nicht λ^+-gerichtet.*

Beweis. Sei $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine kofinale Folge in $\prod f$. Ist $T \subseteq \prod f$ mit $|T| < \lambda$, so wählen wir für alle $g \in T$ ein $\alpha_g < \lambda$ mit $g \leq_I f_{\alpha_g}$. Da λ nach Lemma 3.8 regulär ist, ist

$$\alpha := \sup\{\alpha_g + 1 : g \in T\}$$

ein Element von λ. Nach Konstruktion ist $g \leq_I f_{\alpha_g} <_I f_\alpha$ für alle $g \in T$. Also ist $\prod f$ λ-gerichtet.
$\prod f$ ist natürlich nicht λ^+-gerichtet, denn sonst gäbe es in $\prod f$ eine obere Schranke von $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ im Widerspruch zur Kofinalität dieser Folge. ■

Wir geben nun eine Möglichkeit an, wahre Kofinalitäten von einer Menge auf eine andere zu übertragen.

Lemma 3.16. *Seien A und B nichtleere Mengen, I ein Ideal auf A, J ein Ideal auf B, S eine Menge von Ordinalfunktionen auf A und T eine Menge von Ordinalfunktionen auf B. Ferner sei G eine Funktion von S in T mit*

$$\forall h \in T\ \exists p \in S\ \forall q \in S\ (p \leq_I q \implies h <_J G(q)). \tag{1}$$

Existiert $\mathrm{tcf}(S/I)$*, so existiert auch* $\mathrm{tcf}(T/J)$ *und die beiden Werte sind gleich.*

Beweis. Sei $\lambda = \operatorname{tcf}(S/I)$ und $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ kofinal in S. Wir werden rekursiv eine Folge $(\alpha_i : i < \lambda)$ in λ definieren, so daß $(G(f_{\alpha_i}) : i < \lambda)$ kofinal in T ist:
Sei $i < \lambda$ und $(\alpha_j : j < i)$ bereits definiert. Für alle $j < i$ gibt es nach (1) ein $p_j \in S$, so daß $G(f_{\alpha_j}) <_J G(q)$ für alle $q \in S$ mit $p_j \leq_I q$ gilt. Dazu existiert ein $\alpha_{i,j} < \lambda$ mit $p_j \leq_I f_{\alpha_{i,j}}$. Wir setzen

$$\alpha_i := \max\{i, \sup\{\alpha_{i,j} : j < i\}\}.$$

Wir zeigen nun, daß die konstruierte Folge das gewünschte leistet: Sind $i, j < \lambda$ mit $j < i$, so ist $p_j \leq_I f_{\alpha_{i,j}} \leq_I f_{\alpha_i}$, also $G(f_{\alpha_j}) <_J G(f_{\alpha_i})$ nach Wahl von p_j. Ist $h \in T$ beliebig, so gibt es ein $p \in S$ wie in (1) und dazu ein $\beta < \lambda$ mit $p \leq_I f_\beta$. Wegen $\beta \leq \alpha_\beta$ ist $h <_J G(f_{\alpha_\beta})$. ■

Lemma 3.17. *Ist f eine Ordinalfunktion, deren Werte alle Limeszahlen sind, und existiert* $\operatorname{tcf}(\prod f/I)$*, so ist*

$$\operatorname{tcf}(\prod(\operatorname{cf} \circ f)/I) = \operatorname{tcf}(\prod f/I).$$

Beweis. Sei $\lambda := \operatorname{tcf}(\prod f/I)$ und $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ kofinal in f. Für $a \in A$ sei $(\alpha_i^a : i < \operatorname{cf}(f(a)))$ eine in $f(a)$ kofinale Folge. Für $p \in \prod f$ und $a \in A$ setzen wir

$$G(p)(a) := \min\{i < \operatorname{cf}(f(a)) : \alpha_i^a > p(a)\}.$$

Dann ist G eine Abbildung von $\prod f$ in $\prod(\operatorname{cf} \circ f)$. Wir zeigen, daß G die Voraussetzung (1) aus Lemma 3.16 erfüllt: Sei $h \in \prod(\operatorname{cf} \circ f)$. Definiert man $p \in \prod f$ durch $p(a) := \alpha_{h(a)}^a$ für $a \in A$, so ist offenbar $h < G(p)$. Ist $q \in \prod f$ mit $p \leq_I q$, so gilt sicher $G(p) \leq_I G(q)$. ■

Dieses Lemma besagt, daß es im allgemeinen reicht, sich auf Ordinalfunktionen zu beschränken, deren Werte alle regulär sind. Die Forderung, daß alle Werte von f Limeszahlen sind, ist dabei keine Einschränkung, wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 3.18. *Sei $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine streng monoton wachsende Folge von Ordinalfunktionen und f ein Supremum dieser Folge. Dann gilt: Ist λ eine Limeszahl, so ist $f(a)$ eine Limeszahl für fast alle $a \in A$.*

Beweis. Wegen $f_0 <_I f_1 \leq_I f$ ist

$$B := \mathrm{B}[f_1, f_0] \cup \mathrm{B}(f, f_1) \in I.$$

Daher kann nicht $f(a) = 0$ auf einer positiven Menge B' gelten, denn $B' \setminus B$ wäre ebenfalls positiv, und für $a \in B' \setminus B$ gilt

$$f_0(a) < f_1(a) \leq f(a) = 0.$$

Angenommen, auf einer positiven Menge N sind alle Werte von f Nachfolgerzahlen. Dann können wir eine Ordinalfunktion $f' \lneqq_I f$ durch

$$f'(a) := \begin{cases} f(a) - 1 & a \in N \\ f(a) & a \notin N \end{cases}$$

für $a \in A$ definieren. Nach Lemma 3.7 ist f' keine obere Schranke der gegebenen Folge, also gibt es ein $\beta < \lambda$, so daß $\mathrm{B}(f', f_\beta)$ positiv ist. Nun ist

$$\mathrm{B}(f', f_\beta) \setminus \mathrm{B}[f_{\beta+1}, f_\beta] \subseteq \mathrm{B}(f, f_{\beta+1})$$

und $f_\beta <_I f_{\beta+1}$, also $\mathrm{B}(f, f_{\beta+1})$ positiv bzw. $f \lneqq_I f_{\beta+1}$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung über f. ■

3.3 γ-rapide Folgen und der Hauptsatz der pcf-Theorie

Ist $(f_\alpha : \alpha < \sigma)$ eine streng monotone Folge von Ordinalfunktionen, so muß diese Folge im allgemeinen kein Supremum besitzen. Besitzt sie ein Supremum f, so wird sie im allgemeinen nicht kofinal in f liegen. In [Je3] definiert Jech den Begriff der *γ-rapiden* Folge. Diese Folgen besitzen immer ein Supremum und liegen kofinal in diesem. Wir zitieren im folgenden die für den weiteren Verlauf notwendigen Resultate aus [Je3].
Wir nennen eine Ordinalfunktion f **progressiv**, wenn $\mathrm{cf}(f(a)) > |A|$ für alle $a \in A$ gilt. (Da $A \neq \emptyset$ gelten soll, ist somit insbesondere $\mathrm{cf}(f(a)) \geq \aleph_0$ für alle $a \in A$.)

Lemma 3.19. *Sei f eine progressive Ordinalfunktion, $\lambda > |A|^+$ regulär und $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine Folge von Ordinalfunktionen. Dann gibt es eine Ordinalfunktion $g < f$ mit der Eigenschaft, daß für alle $h < f$ mit $g \leq h$ die Menge*

$$\{\alpha < \lambda : \mathrm{B}(g, f_\alpha) = \mathrm{B}(h, f_\alpha)\}$$

unbeschränkt in λ liegt, also die Mächtigkeit λ hat.

Beweis. [Je3, 2.1] Wir betrachten zunächst den Fall, daß A unendlich ist. Angenommen, die Behauptung gilt nicht. Wir konstruieren rekursiv eine Folge $(g_i : i < |A|^+)$ in $\prod f$ mit $g_i \leq g_j$ für $i < j < |A|^+$ und eine Folge $(\alpha_i : i < |A|^+)$ in λ: $g_0 \in \prod f$ wird beliebig gewählt. Ist $i < |A|^+$ eine Limesordinalzahl, so setzen wir $g_i := \sup\{g_j : j < i\}$. Da f progressiv und $|i| \leq |A|$ ist, ist dann $g_i < f$. Ist $i < |A|^+$ und g_i bereits definiert, so gibt es nach Annahme ein $g_{i+1} < f$ mit $g_i \leq g_{i+1}$ und ein $\alpha_i < \lambda$, so daß $\mathrm{B}(g_{i+1}, f_\alpha) \subsetneq \mathrm{B}(g_i, f_\alpha)$ für alle $\alpha \in [\alpha_i, \lambda)_{\mathrm{ON}}$ ist. Da λ regulär und größer als $|A|^+$ ist, gibt es ein $\alpha^* < \lambda$ mit $\alpha^* \geq \alpha_i$ für alle $i < |A|^+$. Nach Konstruktion ist $(\mathrm{B}(g_i, f_{\alpha^*}) : i < |A|^+)$ dann eine streng monoton fallende Folge von Teilmengen von A der Länge $|A|^+$. Dies ist offenbar ein Widerspruch.
Ist A endlich, so verfahren wir genauso wie eben (der Limesfall tritt hier nicht ein), konstruieren aber eine Folge der Länge $|A|^{++} = |A| + 2$. ■

Das folgende Korollar ersetzt [Je3, 2.2] und gleichzeitig [BM, 4.1]. Außerdem wird es später einen einfachen Beweis für [BM, 1.1] liefern:

Korollar 3.20. *Sei $\lambda > |A|^+$ regulär, f progressiv und $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine modulo I streng monoton steigende Folge von Ordinalfunktionen in $\prod f$. Ist diese Folge unbeschränkt in $\prod f$, dann gibt es eine Funktion $g \in \prod f$ und I-positive Mengen $B_i \subseteq A$ für $i < \lambda$ mit:*

(i) *Ist $i < j < \lambda$, so ist $B_i \subseteq_I B_j$.*

(ii) *Für alle $i < \lambda$ ist $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ kofinal in f modulo $I \restriction B_i$.*

(iii) *Ist J ein Ideal auf A mit $I \subseteq J$ und $B_i \in J$ für alle $i < \lambda$, so ist g modulo J eine obere Schranke von $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$.*

Beweis. Man wähle ein $g < f$ wie im obigen Lemma. Nach Voraussetzung ist g keine obere Schranke der Folge, also gibt es es ein $\alpha^* < \lambda$, so daß $\mathrm{B}(g, f_{\alpha^*})$ positiv ist. Wir definieren

$$B_i := \mathrm{B}(g, f_{\alpha^*+i})$$

für $i < \lambda$. Da $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ monoton steigt, gilt

$$B_i \setminus B_j \subseteq \mathrm{B}(f_{\alpha^*+j}, f_{\alpha^*+i}) \in I$$

für $i < j < \lambda$. Damit ist (i) beweisen, und sicher sind alle B_i positiv, da B_0 positiv ist.
Zum Beweis von (ii) wählen wir nun ein beliebiges $h \in \prod f$ und ein $i < \lambda$ und zeigen, daß dieses h modulo $I \restriction B_i$ von einem Folgenglied übertroffen wird: O.B.d.A. können wir $g \leq h$ annehmen, sonst ersetzen wir h durch $\max\{g, h\}$. Nach Wahl von g gibt es dann ein $\beta \in [\alpha^* + i, \lambda)_{\mathrm{ON}}$ mit $\mathrm{B}(g, f_\beta) = \mathrm{B}(h, f_\beta)$. Wegen $f_{\alpha^*+i} \leq_I f_\beta$ ist

$$B_i \cap \mathrm{B}[f_\beta, h] = B_i \setminus \mathrm{B}(h, f_\beta) = B_i \setminus \mathrm{B}(g, f_\beta) \subseteq \mathrm{B}(f_\beta, f_{\alpha^*+i}) \in I,$$

also $h <_{I \restriction B_i} f_\beta$.
Ist nun J wie in (iii), so ist $\mathrm{B}(g, f_\beta) \in J$, d.h. $f_\beta \leq_J g$ für alle $\beta \in [\alpha^*, \lambda)_{\mathrm{ON}}$ nach Definition der B_i. Wegen $I \subseteq J$ ist dann $f_\beta \leq_J g$ für alle $\beta < \lambda$. ■

Für den Rest dieses Kapitels sei A stets unendlich.
Ist γ eine Kardinalzahl, so besitzt eine Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ von Ordinalfunktionen die **γ-Schrankeneigenschaft modulo** I, wenn sie modulo I streng monoton steigt und wenn gilt: Ist S_a für alle $a \in A$ eine Menge von Ordinalzahlen mit $|S_a| < \gamma$, so gibt es ein $\alpha < \lambda$ derart, daß alle $h \in \prod_{a \in A} S_a$ mit $f_\alpha <_I h$ obere Schranken der Folge sind.
Dies liefert eine hinreichende Bedingung für die Existenz von Suprema:

Satz 3.21. *Seien γ, λ reguläre Kardinalzahlen mit $|A| < \gamma < \lambda$. Ist $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine Folge von Ordinalfunktionen mit der γ-Schrankeneigenschaft, so besitzt sie ein Supremum.*

Beweis. [Je3, 2.8] Angenommen, die Behauptung gilt nicht. Nach Lemma 3.7 gibt es dann für alle oberen Schranken f der Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine obere Schranke $g \lneqq_I f$. Wir konstruieren rekursiv eine Folge $(h_i : i < |A|^+)$ von oberen Schranken mit $h_j \lneqq_I h_i$ für $i < j < |A|^+$:
Sei $h_0 := \sup\{f_\alpha + 1 : \alpha < \lambda\}$. Nach Annahme ist klar, wie h_{i+1} gefunden werden kann, falls h_i bereits definiert ist. Sei daher nun $i < |A|^+$ eine Limeszahl. Für $a \in A$ definieren wir

$$S_a^i := \{h_j(a) : j < i\}.$$

Wegen der γ-Schrankeneigenschaft finden wir ein $\alpha_i < \lambda$, so daß alle $h \in \prod_{a\in A} S_a^i$ mit $f_{\alpha_i} <_I h$ obere Schranken von $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ sind. Wir setzen

$$h_i(a) := \min\{\beta \in S_a^i : \beta > f_{\alpha_i}(a)\}$$

für $a \in A$. Nach Wahl von h_0 ist h_i wohldefiniert und sicher $f_{\alpha_i} < h_i$. Also ist h_i obere Schranke von $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$. Ist $j < i$, so ist $f_{\alpha_i} <_I f_{\alpha_i+1} \leq_I h_{j+1}$, also $h_i \leq_I h_{j+1} \lneqq_I h_j$ nach Wahl von h_i. Damit ist die Folge der h_i definiert.
Sei nun $\alpha := \sup\{\alpha_i : i < |A|^+\}$, also $\alpha < \lambda$ und

$$S_a := \{h_i(a) : i < |A|^+\}$$

für $a \in A$. Analog zur obigen Definition im Limesfall setzen wir

$$h(a) := \min\{\beta \in S_a : \beta > f_\alpha(a)\}$$

für $a \in A$ und erhalten wie eben $h \lneqq_I h_i$ für alle $i < |A|^+$. Für alle $a \in A$ existiert nun sicher eine Limeszahl $i(a) < |A|^+$ mit $h(a) \in S_a^{i(a)}$. Es ist

$$i := \sup\{i(a) : a \in A\}$$

kleiner als $|A|^+$ und damit h Element des Produktes $\prod_{a\in A} S_a^i$.
Nun ist $f_{\alpha_i} \leq_I f_\alpha < h$, d.h. $f_{\alpha_i}(a) < h(a)$ für fast alle $a \in A$. Nach Definition von h_i folgt $h_i \leq_I h$ im Widerspruch zu $h \lneqq_I h_i$. ■

Für jede Ordinalfunktion f auf A definieren wir

$$\lim_I f := \min\{\mu \in \mathrm{CN} : \{a \in A : f(a) \leq \mu\} \in I^+\}.$$

Lemma 3.22. *Seien γ, λ regulär mit $|A| < \gamma < \lambda$, $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine Folge von Ordinalfunktionen mit der γ-Schrankeneigenschaft und f ein Supremum dieser Folge. Dann ist $\mathrm{cf}(f(a)) \geq \gamma$ für fast alle $a \in A$ (und damit $\gamma \leq \lim_I(\mathrm{cf} \circ f)$).*

Beweis. [Je3, 2.7] Nach Lemma 3.18 können wir o.B.d.A. annehmen, daß der Wertebereich von f aus Limeszahlen besteht. Angenommen, die Menge $B := \{a \in A : \mathrm{cf}(f(a)) < \gamma\}$ ist positiv. Für alle $a \in B$ wählen wir eine kofinale Teilmenge S_a von $f(a)$ mit $|S_a| < \gamma$. Für $a \in A \setminus B$ setzen wir $S_a := \{f(a)\}$. Wegen der γ-Schrankeneigenschaft gibt es ein $\alpha < \lambda$, so daß jedes $h \in \prod_{a\in A} S_a$ mit $f_\alpha <_I h$ eine obere Schranke der gegebenen Folge ist.

Es ist $f_\alpha <_I f_{\alpha+1} \leq_I f$, die Menge $B' := B \setminus \mathrm{B}[f, f_\alpha]$ also positiv. Für jedes $a \in B'$ finden wir nach Wahl von S_a ein $h(a) \in S_a$ mit $f_\alpha(a) < h(a) < f(a)$. Für $a \in A \setminus B'$ wählen wir ein beliebiges $h(a) \in S_a$. Für die so definierte Ordinalfunktion $h \in \prod_{a \in A} S_a$ gilt nun

$$\mathrm{B}[h, f_\alpha] \subseteq \mathrm{B}[f, f_\alpha] \in I,$$

also $f_\alpha <_I h$. Damit ist h obere Schranke der Folge nach Wahl von α, jedoch $h \lneqq_I f$ nach Konstruktion. Nach Lemma 3.7 kann f kein Supremum der Folge sein. ■

Ist $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine Folge von Ordinalfunktionen und $\gamma > \omega$ eine reguläre Kardinalzahl, so heißt diese Folge **γ-rapid modulo I**, wenn sie streng monoton steigt und für alle $\beta < \lambda$ mit $\mathrm{cf}(\beta) = \gamma$ ein Club C von Limeszahlen in β existiert, so daß

$$\sup\{f_\nu : \nu \in C \cap \alpha\} <_I f_\alpha$$

für alle $\alpha \in C$ gilt. Folgen dieser Art erfüllen das Kriterium von Lemma 3.21, besitzen also ein Supremum:

Lemma 3.23. *Seien γ, λ regulär mit $|A| < \gamma < \lambda$. Ist $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine γ-rapide Folge von Ordinalfunktionen, so besitzt sie die γ-Schrankeneigenschaft.*

Beweis. [Je3, 2.6] Angenommen, die Behauptung gilt nicht. Für $a \in A$ sei $S_a \subseteq \mathrm{ON}$ so gewählt, daß die Definition der γ-Schrankeneigenschaft verletzt ist. Rekursiv definieren wir nun eine Folge $(h_i : i < \gamma)$ von Ordinalfunktionen und eine Normalfolge $(\alpha_i : i < \gamma)$ in λ:
Sei $\alpha_0 < \lambda$ beliebig. Für Limeszahlen $i < \gamma$ sei $\alpha_i := \sup\{\alpha_j : j < i\}$. Ist $i < \gamma$ und α_i bereits definiert, so finden wir nach Wahl der S_a ein $h_i \in \prod_{a \in A} S_a$ mit $f_{\alpha_i} <_I h_i$, so daß h_i nicht obere Schranke der Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ ist. Daher gibt es ein $\alpha_{i+1} < \lambda$, so daß $f_{\alpha_{i+1}} \leq_I h_i$ *nicht* gilt. Da die Folge der f_α streng monoton steigt, können wir $\alpha_{i+1} > \alpha_i$ wählen.
Nach Konstruktion ist $\beta := \sup\{\alpha_i : i < \gamma\} < \lambda$ und $\mathrm{cf}(\beta) = \gamma$. Nach Voraussetzung gibt es einen Club C von Limeszahlen in β mit

$$s_\alpha := \sup\{f_\nu : \nu \in C \cap \alpha\} <_I f_\alpha$$

für alle $\alpha \in C$. O.B.d.A. können wir $\{\alpha_i : i < \gamma\} \subseteq C$ annehmen, anderenfalls ersetzen wir $(\alpha_i : i < \gamma)$ durch $(\alpha_i : i \in D)$, wobei D der Club

$$D := \{i < \gamma : \alpha_i \in C\}$$

sei.
Ist $i < \gamma$, so gilt $s_{\alpha_i} <_I f_{\alpha_i} <_I h_i$ und nicht $f_{\alpha_{i+1}} \leq_I h_i$. Dies bedeutet, daß die Menge

$$\begin{aligned} B_i &:= \mathrm{B}(h_i, f_{\alpha_{i+1}}) \setminus (\mathrm{B}[f_{\alpha_i}, s_{\alpha_i}] \cup \mathrm{B}[h_i, f_{\alpha_i}]) \\ &= \{a \in A : s_{\alpha_i}(a) < f_{\alpha_i}(a) < h_i(a) < f_{\alpha_{i+1}}(a)\} \end{aligned}$$

positiv ist, also insbesondere ein Element a_i enthält. Da $\gamma > |A|$ regulär ist, gibt es eine Menge $Z \subseteq \gamma$ mit $|Z| = \gamma$, so daß die Funktion $(a_i : i \in \gamma)$ auf Z den konstanten Wert a annimmt.
Sind $i, j \in Z$ mit $i + 1 < j$, so ist $\alpha_{i+1} \in C \cap \alpha_j$, also $f_{\alpha_{i+1}}(a) \leq s_{\alpha_j}(a)$. Ferner ist $a \in B_i$ und $a \in B_j$, also $h_i(a) < f_{\alpha_{i+1}}(a)$ und $s_{\alpha_j}(a) < h_j(a)$. Insgesamt folgt somit $h_i(a) < h_j(a)$. Damit hat $\{h_i(a) : i \in Z\}$ offenbar die Mächtigkeit γ im Widerspruch zu $|S_a| < \gamma$. ∎

Wir wollen nun zeigen, daß (unter gewissen Voraussetzungen) γ-rapide Folgen überhaupt existieren:

Lemma 3.24. *Sei f eine Ordinalfunktion, λ eine Kardinalzahl, $\prod f$ nichtleer und λ-gerichtet und $\mu := \lim_I(\mathrm{cf} \circ f)$. Ist $\lambda' < \lambda$ regulär, so gibt es eine Folge der Länge λ' in $\prod f$, die γ-rapid für alle $\gamma \in [\aleph_1, \mu)_{\mathrm{reg}}$ ist.*

Beweis. Für alle $\beta < \lambda'$ mit $\mathrm{cf}(\beta) \in [\aleph_1, \mu)_{\mathrm{reg}}$ wählen wir einen Club C_β von Limeszahlen in β vom Ordnungstyp $\mathrm{cf}(\beta)$. Wir definieren die gesuchte Folge rekursiv:
$f_0 \in \prod f$ sei beliebig gewählt. Ist für $\alpha < \lambda'$ die Funktion f_α bereits definiert, so wählen wir ein $f_{\alpha+1} \in \prod f$ mit $f_\alpha <_I f_{\alpha+1}$. (Solch eine Funktion existiert, da $\prod f$ nach Voraussetzung insbesondere 2-gerichtet ist.) Sei nun $\alpha < \lambda'$ Limeszahl und $(f_\nu : \nu < \alpha)$ bereits definiert. Ist $\beta < \lambda'$ mit $\mathrm{cf}(\beta) \in [\aleph_1, \mu)_{\mathrm{reg}}$, so ist

$$B_\beta := \{a \in A : \mathrm{cf}(f(a)) \leq \mathrm{cf}(\beta)\} \in I$$

nach Wahl von μ und

$$t_\beta(a) := \sup\{f_\nu(a) : \nu \in C_\beta \cap \alpha\} < f(a)$$

für alle $a \in A \setminus B_\beta$. Somit ist $t_\beta <_I f$, o.B.d.A. können wir also $t_\beta \in \prod f$ annehmen. (Gegebenenfalls müssen wir diese Funktion auf einer Idealmenge abändern.) Nach Voraussetzung gibt es ein $f_\alpha \in \prod f$ mit $f_\nu <_I f_\alpha$ für alle $\nu < \alpha$ und $t_\beta <_I f_\alpha$ für alle $\beta < \lambda'$ mit $\mathrm{cf}(\beta) \in [\aleph_1, \mu)_{\mathrm{reg}}$ und $\alpha \in C_\beta$.
Die so konstruierte Folge leistet offenbar das Gewünschte. ■

Mit Hilfe der so geleisteten Vorarbeit sind wir nun in der Lage, einen kurzen neuen Beweis für den sogenannten Hauptsatz der pcf-Theorie (s. z.B. [BM, 2.1]) zu finden. Die Bedeutung dieses Satzes wird erst im späteren Kontext klar werden. Das folgende Resultat ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes, da wir hier Ideale und Ordinalfunktionen an Stelle von Ultrafiltern und Mengen von regulären Kardinalzahlen betrachten.

Satz 3.25. *Sei $\lambda := \mathrm{tcf}(\prod f/I)$ und $|A| < \mu := \lim_I(\mathrm{cf} \circ f)$. Ist $\lambda' \in (\mu, \lambda)_{\mathrm{reg}}$, so gibt es eine Funktion $g <_I f$ und eine I-positive Teilmenge B von A mit:*

(i) $\lambda' = \mathrm{tcf}(\prod g/(I \restriction B))$

(ii) $\mu \leq \lim_I(\mathrm{cf} \circ g)$

Beweis. O.B.d.A. sei $\mu < \lambda$ (sonst ist nichts zu zeigen), also λ unendlich, da A unendlich ist. Nach Lemma 3.10 und Lemma 3.18 können wir daher annehmen, daß alle Werte von f Limeszahlen sind. Nach Lemma 3.15 ist $\prod f$ λ-gerichtet. Ist $\mu = \kappa^+$ für eine Kardinalzahl κ, so ist $\mathrm{cf}(f(a)) = \kappa^+$ auf einer positiven Menge X nach Definition von $\lim_I f$ (denn $\{a \in A : \mathrm{cf}(f(a)) \leq \kappa\}$ ist eine Idealmenge). Damit folgt

$$\begin{aligned}\lambda &= \mathrm{tcf}(\prod f/I) = \mathrm{tcf}(\prod f/(I \restriction X)) \\ &= \mathrm{tcf}(\prod(\mathrm{cf} \circ f)/(I \restriction X)) = \mathrm{tcf}({}^X\kappa^+/(I \cap \mathcal{P}(X))) = \kappa^+ = \mu\end{aligned}$$

(und zwar aufgrund der Lemmata 3.13, 3.17, 3.14 sowie 3.11). Wegen unserer Annahme $\mu < \lambda$ muß μ also Limeskardinalzahl sein.

Nach Lemma 3.24 finden wir eine Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda')$ in $\prod f$, die γ-rapid für alle $\gamma \in [\aleph_1, \mu)_{\text{reg}}$ ist. Nach Lemma 3.21 und Lemma 3.23 besitzt diese Folge ein Supremum g.
Da $\prod f$ λ-gerichtet ist, gibt es ein $h \in \prod f$ mit $f_\alpha <_I h$ für alle $\alpha < \lambda'$. Daher können wir o.B.d.A. $g < f$ annehmen. (Sonst ersetzen wir g durch $\min\{g, h\}$.)
Da μ Limeskardinalzahl ist, liefert Lemma 3.22 die Beziehung $\mu \leq \lim_I(\mathrm{cf} \circ g)$, d.h. (ii). O.B.d.A. kann man also annehmen, daß g progressiv ist. Ebenso können wir fordern, daß $(f_\alpha : \alpha < \lambda')$ eine Folge in $\prod g$ ist. (Wir können gegebenenfalls jedes f_α auf einer Idealmenge abändern.) Diese Folge ist unbeschränkt in $\prod g$, da g Supremum der Folge ist. Mit Korollar 3.20 erhält man ein I-positives B mit der Eigenschaft (i). ■

Bemerkung. Wir werden die Methodik der γ-rapiden Folgen später noch einmal benutzen, um einen einfachen Beweis für Satz 7.42 anzugeben.

4 Der pcf-Operator und das Ideal $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$

4.1 Definition von pcf und einfache Eigenschaften

Wir werden uns zunächst auf die Untersuchung der wahren Kofinalitäten von *progressiven* Ordinalfunktionen beschränken. Das folgende Lemma besagt, daß es dann reicht, injektive Funktionen zu betrachten, bzw. daß nur der Wertebereich der Funktionen von Interesse ist.
Ist I ein Ideal auf A und f eine Funktion mit $\mathrm{Db}(f) = A$, so ist

$$f[I] := \{B \subseteq \mathrm{Wb}(f) : f^{-1}[B] \in I\}$$

bekanntlich ein Ideal auf $\mathrm{Wb}(f)$.

Lemma 4.1. *Sei $A \neq \emptyset$, I ein Ideal auf A und f eine progressive Ordinalfunktion auf A. Existiert $\mathrm{tcf}(\prod f/I)$, so existiert auch*

$$\mathrm{tcf}(\prod \mathrm{Wb}(f)/f[I])$$

und die beiden Werte sind gleich.

Beweis. Wir wollen Lemma 3.16 anwenden und definieren dazu eine Funktion G, die die Bedingung (1) dort erfüllt: Für $p \in \prod f$ und $\alpha \in \mathrm{Wb}(f)$ setzen wir

$$G(p)(\alpha) := \sup\{p(a) + 1 : a \in A \wedge f(a) = \alpha\}.$$

Da f progressiv ist, ist $G(p) \in \prod \mathrm{Wb}(f)$. Ist $h \in \prod \mathrm{Wb}(f)$, so ist $h \circ f$ ein Element von $\prod f$. Diese Funktion wird die Rolle von p in Lemma 3.16 einnehmen. Sei also $q \in \prod f$ mit $h \circ f \leq_I q$.
Ist $\alpha \in \mathrm{Wb}(f)$ mit $G(q)(\alpha) \leq h(\alpha)$ und $a \in A$ mit $f(a) = \alpha$, so ist $q(a) < h(\alpha) = h(f(a))$ nach Definition von G. Wir haben also

$$f^{-1}[\mathrm{B}[G(q), h]] \subseteq \mathrm{B}(q, h \circ f) \in I$$

und damit $h <_{f[I]} G(q)$ gezeigt. ∎

Nach Lemma 3.17 ist es außerdem keine wesentliche Einschränkung, wenn wir davon ausgehen, daß der Wertebereich von f nur aus regulären Kardinalzahlen besteht. Dies führt zu den folgenden Definitionen:

In diesem Kapitel sei a immer eine Menge von regulären Kardinalzahlen. Wir nennen a **progressiv**, wenn id_a progressiv ist, d.h. wenn $|a| < \min a$ gilt. Außerdem sei $\lim_I a := \lim_I \mathrm{id}_a$ für jedes Ideal auf a.
Die Menge der möglichen Kofinalitäten (**p***ossible* **c***o***f***inalities*) von a definieren wir als

$$\mathrm{pcf}(a) := \{\mathrm{tcf}(\prod a/I) : I \text{ Ideal auf } a\}.$$

Bemerkung. Nach unserer Konvention ist klar, daß in der Definition von $\mathrm{pcf}(a)$ nur die Ideale I erscheinen, für die $\mathrm{tcf}(\prod a/I)$ existiert. Außerdem ist $\mathrm{pcf}(\emptyset) = \emptyset$, da es keine echten Ideale auf $\emptyset$ gibt.

Für jede Kardinalzahl μ setzen wir außerdem

$$\mathrm{pcf}_\mu(a) := \bigcup\{\mathrm{pcf}(A) : A \in [a]^{\leq\mu}\}.$$

Lemma 4.2. $\mathrm{pcf}(a) = \{\mathrm{cf}(\prod a/D) : D$ *ist Ultrafilter auf* $a\}$.

Beweis. Ist D Ultrafilter auf a, so gilt für das zu D duale Ideal I natürlich $\mathrm{tcf}(\prod a/I) = \mathrm{cf}(\prod a/D)$. Ist umgekehrt I ein Ideal auf a, so daß $\mathrm{tcf}(\prod a/I)$ existiert, so existiert ein Ultrafilter D auf a mit $D \cap I = \emptyset$. Es gilt dann $\mathrm{cf}(\prod a/D) = \mathrm{tcf}(\prod a/I)$. ■

Wir geben nun einige einfache Eigenschaften von $\mathrm{pcf}(a)$ an:

Lemma 4.3. *Sei λ eine Kardinalzahl und b eine Menge von regulären Kardinalzahlen. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{pcf}(a)$ *ist eine Menge von regulären Kardinalzahlen.*

(ii) *Ist D der von $\lambda \in a$ erzeugte Hauptultrafilter auf a, so ist* $\mathrm{cf}(\prod a/D) = \lambda$.

(iii) $a \subseteq \mathrm{pcf}(a)$

(iv) *Ist a endlich, so ist* $\mathrm{pcf}(a) = a$.

(v) $\mathrm{pcf}(a) \cap \min a = \emptyset$

(vi) *Besitzt a kein Maximum und ist D ein Endenultrafilter auf a (d.h. ein Ultrafilter, der keine beschränkte Teilmenge von a enthält), so ist*

$$\mathrm{cf}(\prod a/D) \geq \sup a.$$

(vii) $a \subseteq b \implies \mathrm{pcf}(a) \subseteq \mathrm{pcf}(b)$

(viii) $\mathrm{pcf}(a \cup b) = \mathrm{pcf}(a) \cup \mathrm{pcf}(b)$

(ix) *Ist* $b \subseteq a$ *und* $\lambda \in \mathrm{pcf}(b)$, *so gibt es einen Ultrafilter* D *auf* a *mit* $b \in D$ *und* $\lambda = \mathrm{cf}(\prod a/D)$.

Beweis. Ist $f \in \prod a$, so ist auch $f+1 \in \prod a$ und $f < f+1$, $\prod a$ besitzt also für keinen Ultrafilter D ein Maximum bzgl. $\leq_D$. Nach Lemma 3.8 folgt (i).
Zum Beweis von (ii) sei D der von $\lambda \in a$ erzeugte Hauptultrafilter. Setzen wir

$$f_\varrho(\alpha) := \begin{cases} 0 & \alpha \neq \lambda \\ \varrho & \alpha = \lambda \end{cases}$$

für $\varrho < \lambda$ und $\alpha \in a$, so ist die Folge $(f_\varrho : \varrho < \lambda)$ modulo D kofinal in $\prod a$. Damit folgen sofort auch die dritte und die vierte Behauptung. (Jeder Ultrafilter auf einer endlichen Menge ist ein Hauptultrafilter.)
Sei nun $\lambda < \min a$. Angenommen, es gibt einen Ultrafilter D auf a und eine modulo D kofinale Folge $(f_\varrho : \varrho < \lambda)$ in $\prod a$. Durch $g(\alpha) := \sup\{f_\varrho(\alpha)+1 : \varrho < \lambda\}$ für $\alpha \in a$ wird wegen der Regularität der Elemente von a dann eine Funktion $g \in \prod a$ mit $f_\varrho < g$ für alle $\varrho < \lambda$ definiert. Dieser Widerspruch beweist (v).
Nun besitze a kein Maximum, und D sei ein Endenultrafilter auf a. Sei $\lambda < \sup a$ regulär und $(f_\varrho : \varrho < \lambda)$ eine Folge von Elementen von $\prod a$. Setzt man

$$g(\alpha) := \begin{cases} 0 & \alpha \leq \lambda \\ \sup\{f_\varrho(\alpha) + 1 : \varrho < \lambda\} & \alpha > \lambda \end{cases}$$

für $\alpha \in a$, so ist

$$\mathrm{B}(f_\varrho, g) = a \cap (\lambda, \sup a)_{\mathrm{reg}} \in D,$$

d.h. $f_\varrho <_D g$ für alle $\varrho < \lambda$. Die Folge kann also modulo D nicht kofinal in $\prod a$ sein.
Zum Beweis von Aussage (vii) sei $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$ und D ein Ultrafilter auf a mit $\mathrm{cf}(\prod a/D) = \lambda$. Für einen Ultrafilter D' auf b, der D erweitert, gilt dann sicher $\lambda = \mathrm{cf}(\prod b/D') \in \mathrm{pcf}(b)$ nach der Bemerkung hinter Lemma 3.14.
$\mathrm{pcf}(a) \cup \mathrm{pcf}(b) \subseteq \mathrm{pcf}(a \cup b)$ wurde eben gezeigt. Sei nun $\lambda \in \mathrm{pcf}(a \cup b)$ und D Ultrafilter auf $a \cup b$ mit $\lambda = \mathrm{cf}(\prod(a \cup b)/D)$. Wegen $a \cup b \in D$ ist o.B.d.A. $a \in D$,

und es gilt

$$\lambda = \mathrm{cf}(\prod(a \cup b)/D) = \mathrm{cf}(\prod a/(D \cap \mathcal{P}(a))) \in \mathrm{pcf}(a).$$

Das beweist (viii).
Für den Beweis der letzten Behauptung sei D' ein Ultrafilter auf b mit $\lambda = \mathrm{cf}(\prod b/D')$. Ist D ein Ultrafilter auf a, der D' erweitert, so folgt sofort die Behauptung. ■

4.2 Das Ideal $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$

Lemma 3.15 gibt eine notwendige Voraussetzung dafür an, daß $\mathrm{tcf}(\prod a/I)$ existiert: $\prod a$ muß λ-gerichtet modulo I sein. Abkürzend nennen wir ein Ideal I auf a **λ-gerichtet**, wenn $\prod a$ modulo I λ-gerichtet ist.

Bemerkung. Nach unserer Konvention über a ist I genau dann λ-gerichtet, wenn es für alle $S \subseteq \prod a$ mit $|S| < \lambda$ ein $f \in \prod a$ mit $g \leq_I f$ für alle $g \in S$ gibt. (Dann ist nämlich auch $f + 1 \in \prod a$ und $g <_I f + 1$ für alle $g \in S$.)

Wir möchten die λ-gerichteten Ideale näher untersuchen und führen dafür den folgenden Begriff ein: Sei λ eine unendliche Kardinalzahl. Wir nennen ein Ideal I auf a **λ-mächtig**, wenn zu jeder I-positiven Menge $b \subseteq a$ ein Ultrafilter D auf a existiert mit $b \in D$, $D \cap I = \emptyset$ und $\mathrm{cf}(\prod a/D) \geq \lambda$.

Lemma 4.4. *Sei λ eine Kardinalzahl und I ein λ-mächtiges Ideal auf a. Dann ist $\{\delta\} \in I$ für jedes $\delta \in a \cap \lambda$.*

Beweis. Sei $\delta \in a \cap \lambda$. Jeder Ultrafilter auf a mit $\{\delta\} \in D$ ist offenbar der von δ erzeugte Hauptultrafilter und damit gilt $\mathrm{cf}(\prod a/D) = \delta < \lambda$ nach Lemma 4.3. Nach Definition des Begriffes „λ-mächtig“ kann $\{\delta\}$ nicht positiv sein. ■

Der folgende Satz erweitert das Ergebnis [BM, 1.1]. Mit Hilfe der Methoden aus dem letzten Kapitel können wir jedoch einen kürzeren Beweis geben:

Satz 4.5. *Sei λ eine Kardinalzahl, a progressiv und I ein λ-mächtiges Ideal auf a. Dann ist $\prod a$ λ-gerichtet modulo I.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß es zu jeder Teilmenge S von $\prod a$ mit $|S| < \lambda$ ein $g \in \prod a$ mit $f \leq_I g$ für alle $f \in S$ gibt. Wir beweisen dies mittels transfiniter Induktion über $|S|$:
Ist $|S| \leq |a|^+$, so setzen wir $g := \sup S$. Dann ist $f \leq g$ für alle $f \in S$. Wegen der Progressivität von a wird g im allgemeinen ein Element von $\prod a$ sein. Ein Problem kann nur auftreten, wenn

$$\delta := \min a = |a|^+ = |S|$$

gilt. In diesem Fall ist jedoch $\delta < \lambda$ und damit $\{\delta\} \in I$ nach dem obigen Lemma. Also dürfen wir g an der Stelle δ beliebig abändern.
Für den Induktionsschluß sei $\mu := |S| > |a|^+$ und $(f_\alpha : \alpha < \mu)$ eine Aufzählung von S. O.B.d.A. sei diese Folge streng monoton wachsend modulo I. (Anderenfalls wählen wir für $\alpha < \mu$ rekursiv ein $f'_\alpha \in \prod a$ mit

$$f_\alpha <_I f'_\alpha \wedge \forall \beta < \alpha \; f'_\beta <_I f'_\alpha.$$

Dies ist nach Induktionsvoraussetzung möglich. Offenbar reicht es, eine Schranke für $(f'_\alpha : \alpha < \mu)$ zu finden.)
Ist $(\alpha_i : i < \mathrm{cf}(\mu))$ kofinale Folge in μ, so reicht es offenbar, eine Schranke für $(f_{\alpha_i} : i < \mathrm{cf}(\mu))$ zu finden. Nach Induktionsvoraussetzung können wir also zusätzlich annehmen, daß μ regulär ist.
Nun sind alle Voraussetzungen erfüllt, um Korollar 3.20 (für μ und id_a statt λ und f) anwenden zu können: Wäre unsere Folge unbeschränkt in $\prod a$, so gäbe es eine I-positive Menge B derart, daß die Folge kofinal in $\prod a$ modulo $I \restriction B$ wäre. Nach der Voraussetzung über I läßt sich $I \restriction B$ jedoch zu einem Ultrafilter D auf a mit $\mathrm{cf}(\prod a/D) \geq \lambda > \mu$ erweitern. Dies ist offenbar ein Widerspruch. ■

Wir möchten nun wissen, ob es λ-mächtige Ideale überhaupt gibt und wie wir sie gegebenenfalls charakterisieren können.
Der Schnitt über beliebige viele λ-mächtige Ideale ist sicher wieder ein λ-mächtiges Ideal. Gibt es ein λ-mächtiges Ideal auf a, so ist die folgende Definition also sinnvoll:

$$\mathcal{J}_{<\lambda}(a) := \bigcap \{I : I \text{ ist } \lambda\text{-mächtiges Ideal auf } a\}.$$

$\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ ist dann das kleinste λ-mächtige Ideal auf a. Anderenfalls setzen wir $\mathcal{J}_{<\lambda}(a) := \mathcal{P}(a)$. In diesem Fall ist $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ trivialerweise ein λ-mächtiges *unechtes* Ideal.

Sei b eine Teilmenge von a. b **erzwingt** $\mathrm{cf}(\prod a) < \lambda$, wenn für jeden Ultrafilter D auf a, der b enthält, $\mathrm{cf}(\prod a/D) < \lambda$ gilt.

Lemma 4.6. *Für jede Kardinalzahl λ ist*

$$\mathcal{J}_{<\lambda}(a) = \{b \subseteq a : b \textit{ erzwingt } \mathrm{cf}(\prod a) < \lambda\}.$$

Beweis. Ist $b \subseteq a$ mit $b \notin \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$, so gibt es einen Ultrafilter D auf a mit $b \in D$, $D \cap \mathcal{J}_{<\lambda}(a) = \emptyset$ und $\mathrm{cf}(\prod a) \geq \lambda$. b erzwingt also nicht $\mathrm{cf}(\prod a) < \lambda$.

Ist umgekehrt b eine Teilmenge von a, die $\mathrm{cf}(\prod a) < \lambda$ nicht erzwingt, so gibt es einen Ultrafilter D auf a mit $b \in D$ und $\mathrm{cf}(\prod a/D) \geq \lambda$. Das zu D duale maximale Ideal I ist dann sicher λ-mächtig und enthält b nicht. Nach Definition von $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ folgt $b \notin \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$. ■

Korollar 4.7. *Für jede Kardinalzahl λ ist*

$$\mathcal{J}_{<\lambda}(a) = \{b \subseteq a : \mathrm{pcf}(b) \subseteq \lambda\}.$$

Beweis. Sei b eine Teilmenge von a. Jeder Ultrafilter auf b läßt sich zu einem Ultrafilter auf a erweitern. Umgekehrt ist $D \cap \mathcal{P}(b)$ ein Ultrafilter auf b, falls D Ultrafilter auf a mit $b \in D$ ist. Die Bemerkung hinter Lemma 3.14 liefert dann

$$\mathrm{pcf}(b) = \{\mathrm{cf}(\prod a/D) : D \text{ Ultrafilter auf } a \wedge b \in D\}.$$

Damit folgt die Behauptung sofort aus dem vorherigen Lemma. ■

Korollar 4.8. *Ist λ Kardinalzahl und $b \subseteq a$, so ist $\mathcal{J}_{<\lambda}(b) = \mathcal{J}_{<\lambda}(a) \cap \mathcal{P}(b)$.*

Korollar 4.9. *Sind κ und λ Kardinalzahlen mit $\kappa < \lambda$, so ist $\mathcal{J}_{<\kappa}(a) \subseteq \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$.*

Lemma 4.10. *Besitzt a kein Maximum und ist $\lambda = \sup a$, so ist jede Menge aus $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ beschränkte Teilmenge von a.*

Beweis. Sei $b \subseteq a$ unbeschränkte Teilmenge von a. Dann gibt es einen Endenultrafilter D auf a, der b enthält. Nach Lemma 4.3 ist $\mathrm{cf}(\prod a/D) \geq \lambda$, also $b \notin \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$. ■

Eine weitere Charakterisierung ist die folgende:

Lemma 4.11. *Sei a progressiv und λ eine Kardinalzahl. Dann gibt es genau dann λ-gerichtete Ideale auf a, wenn es λ-mächtige Ideale gibt, also wenn $\mathcal{J}_{<\lambda}(a) \neq \mathcal{P}(a)$ ist. In diesem Fall ist $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ das kleinste Ideal auf a, das λ-gerichtet ist.*

Beweis. Ist I ein beliebiges λ-gerichtetes Ideal auf a und D ein Ultrafilter auf a, der I erweitert, so ist D auch λ-gerichtet, nach Lemma 3.15 also $\mathrm{cf}(\prod a/D) \geq \lambda$. Damit ist I sicher λ-mächtig, also $\mathcal{J}_{<\lambda}(a) \subseteq I$.
Nach Satz 4.5 ist $\prod a$ modulo $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ λ-gerichtet, falls $\mathcal{J}_{<\lambda}(a) \neq \mathcal{P}(a)$ ist. ■

Korollar 4.12. *Ist a progressiv, λ eine Kardinalzahl und D ein Ultrafilter auf a, so gilt*

$$\mathrm{cf}(\prod a/D) < \lambda \iff D \cap \mathcal{J}_{<\lambda}(a) \neq \emptyset.$$

Beweis. Ist $\mathrm{cf}(\prod a/D) < \lambda$, so ist $\prod a$ modulo D nicht λ-gerichtet nach Lemma 3.15, also D keine Erweiterung von $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ nach dem obigen Lemma. Die Umkehrung folgt aus Lemma 4.6. ■

Korollar 4.13. *Ist a progressiv und λ eine Kardinalzahl, so gilt*

$$\lambda \in \mathrm{pcf}(a) \iff \mathcal{J}_{<\lambda}(a) \neq \mathcal{J}_{<\lambda^+}(a).$$

Beweis. Ist D ein Ultrafilter auf a mit $\lambda = \mathrm{cf}(\prod a/D)$, so existiert nach Korollar 4.12 ein $b \in D \cap \mathcal{J}_{<\lambda^+}(a)$. Nach Lemma 4.6 folgt $b \notin \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$. Ist umgekehrt $b \notin \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$, so gibt es ebenfalls nach diesem Lemma einen Ultrafilter D auf a mit $\mathrm{cf}(\prod a/D) \geq \lambda$ und $b \in D$. Ist außerdem $b \in \mathcal{J}_{<\lambda^+}(a)$, so folgt sofort $\mathrm{cf}(\prod a/D) = \lambda$. ■

Ist κ eine Kardinalzahl, so nennen wir eine Menge $I \subseteq \mathcal{P}(a)$ **κ-vollständig**, wenn $\bigcup X \in I$ für jede Teilmenge X von I mit $|X| < \kappa$ gilt.

Lemma 4.14. *Ist I ein $|a|^+$-vollständiges Ideal auf a, so ist $I = \mathcal{P}(b)$ für eine Teilmenge b von a.*

Beweis. Für alle $\delta \in \bigcup I$ wählen wir eine Menge $b_\delta \in I$ mit $\delta \in b_\delta$. Nach Voraussetzung ist $b := \bigcup\{b_\delta : \delta \in \bigcup I\}$ ein Element von I. Offenbar gilt $I = \mathcal{P}(b)$ nach Konstruktion. ■

Lemma 4.15. *Ist λ eine Kardinalzahl und $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ $|a|^+$-vollständig, so gibt es eine Menge $b \subseteq a$ mit*

(i) $\mathcal{J}_{<\lambda}(a) = \mathcal{P}(b)$

(ii) $\mathrm{pcf}(b) \subseteq \lambda$

(iii) $a \cap \lambda \subseteq b$

Beweis. Nach dem obigen Lemma gibt es eine Menge $b \subseteq a$ mit (i). Nach Korollar 4.7 folgt (ii). Ist $\kappa \in a$ mit $\kappa < \lambda$, so ist $\{\kappa\} \in \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ und damit $\kappa \in b$. ■

Bemerkung. In [Sh5, VIII] gibt Shelah in 1.6(1) eine hinreichende Bedingung dafür an, daß $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ κ-vollständig ist. Das obige Lemma formuliert eine notwendige Bedingung. $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ wird nach dieser Aussage nur dann $|a|^+$-vollständig sein, wenn a Vereinigung zweier Mengen b_1 und b_2 ist, so daß jedes Element von $\mathrm{pcf}(b_1)$ kleiner als jedes Element von b_2 ist.
Dies ist z.B. immer der Fall, wenn b_1 ein endliches Anfangsstück von a und $b_1 \cap b_2 = \emptyset$ ist oder wenn $b_1 = C_0^+$ für einen Club C_0 wie in Satz 7.42 ist und alle Elemente von $b_2 := a \setminus b_1$ größer als λ^+ sind. (Die „Lücke" zwischen b_1 und b_2 muß also auch für unendliches b_1 nicht sehr groß sein.)

Lemma 4.16. *Ist a progressiv und μ eine Kardinalzahl, so ist*

$$|\mathrm{pcf}_\mu(a)| \leq |a|^\mu.$$

Beweis. [BM, p. 232] O.B.d.A. seien a und μ unendlich, denn sonst ist $\mathrm{pcf}_\mu(a) = a$. Wir definieren eine Funktion F von $\mathrm{pcf}_\mu(a)$ in $\mathcal{P}([a]^{\leq\mu})$ durch

$$F(\lambda) := \mathcal{J}_{<\lambda^+}(a) \cap [a]^{\leq\mu}$$

für $\lambda \in \mathrm{pcf}_\mu(a)$. Nun zeigen wir, daß F streng monoton ist:
Seien $\kappa, \lambda \in \mathrm{pcf}(a)$ mit $\kappa < \lambda$. Offensichtlich ist $F(\kappa) \subseteq F(\lambda)$.
Wir wählen ein $A \subseteq a$ mit $|A| \leq \mu$ und $\lambda \in \mathrm{pcf}(A)$. Nach Korollar 4.13 gibt es ein $b \in \mathcal{J}_{<\lambda^+}(A) \setminus \mathcal{J}_{<\lambda}(A)$, also mit $b \notin \mathcal{J}_{<\kappa^+}(A)$. Nach Korollar 4.8 ist $b \in F(\lambda) \setminus F(\kappa)$. ■

Wegen $\mathrm{pcf}(a) = \mathrm{pcf}_{|a|}(a)$ folgt sofort:

Korollar 4.17. *Ist a progressiv, so ist* $|\operatorname{pcf}(a)| \le 2^{|a|}$.

Lemma 4.18. *Ist a progressiv und λ eine Limeskardinalzahl, so ist*

$$\mathcal{J}_{<\lambda}(a) = \bigcup\{\mathcal{J}_{<\mu}(a) : \mu \in \mathrm{CN} \wedge \mu < \lambda\}.$$

Beweis. [BM, 1.3] Nach Korollar 4.9 ist

$$I := \bigcup\{\mathcal{J}_{<\mu}(a) : \mu \in \mathrm{CN} \wedge \mu < \lambda\} \subseteq \mathcal{J}_{<\lambda}(a).$$

O.B.d.A. sei $I \neq \mathcal{P}(a)$. I ist als Vereinigung über eine Kette von Idealen ebenfalls ein Ideal. Für jedes I-positive b gibt es nun einen Ultrafilter D auf a, der I erweitert und b enthält. Nach Korollar 4.12 ist $\operatorname{cf}(\prod a/D) \ge \lambda$, also $b \notin \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ nach demselben Korollar. Somit gilt $\mathcal{J}_{<\lambda}(a) \subseteq I$. ■

Wir zitieren noch ein weiteres Ergebnis über das Ideal $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$. Es handelt sich hierbei um eine Folgerung aus Korollar 3.20 (bzw. aus Lemma 7.4), der Beweis findet sich in 4.2 bis 4.4 von [BM].

Lemma 4.19. *Ist a progressiv, λ Kardinalzahl und $b \in \mathcal{J}_{<\lambda^+}(a) \setminus \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$, so ist*

$$\operatorname{tcf}(\prod a/(\mathcal{J}_{<\lambda}(a) \restriction b)) = \lambda.$$

4.3 Das Maximum von $\operatorname{pcf}(a)$

Lemma 4.20. *Ist a progressiv, so gilt*

$$\operatorname{pcf}(a) \subseteq \lambda \iff \mathcal{J}_{<\lambda}(a) = \mathcal{P}(a)$$

für alle Kardinalzahlen λ.

Beweis. Gibt es ein $\kappa \in \operatorname{pcf}(a)$ mit $\kappa \ge \lambda$, so ist $\mathcal{J}_{<\lambda}(a) \subsetneq \mathcal{J}_{<\kappa^+}(a)$ nach Korollar 4.13. Ist umgekehrt $\mathcal{J}_{<\lambda}(a) \subsetneq \mathcal{P}(a)$, so gibt es einen Ultrafilter D auf a, der $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ erweitert. Nach Korollar 4.12 ist $\operatorname{cf}(\prod a/D) \ge \lambda$. ■

Bemerkung. Zusammen mit Lemma 4.11 beantwortet dieses Lemma damit (für progressive a) vollständig unsere Frage nach der Existenz von λ-gerichteten Idealen: Es gibt genau dann λ-gerichtete Ideale, wenn $\operatorname{pcf}(a) \not\subseteq \lambda$ gilt.

Lemma 4.21. *Ist a progressiv, so besitzt* $\operatorname{pcf}(a)$ *ein Maximum.*

Beweis. [BM, 1.8] Angenommen, $\lambda := \sup\ \mathrm{pcf}(a)$ ist kein Element von $\mathrm{pcf}(a)$. Dann ist λ Limeskardinalzahl und $\mathcal{J}_{<\lambda}(a) = \mathcal{P}(a)$ nach Lemma 4.20. Nach Lemma 4.18 ist $a \in \mathcal{J}_{<\kappa}(a)$ für ein $\kappa < \lambda$. Mit Korollar 4.7 folgt der Widerspruch $\mathrm{pcf}(a) \subseteq \kappa$. ■

Der folgende Satz entspricht [Sh5, II 3.1] bzw. [BM, 7.10]. Wir können jedoch einen neuen, einfachen Beweis angeben, der weder die Existenz von Generatoren voraussetzt noch Approximationsfolgen (s. nächstes Kapitel) benutzt:

Satz 4.22. *Ist a progressiv, so gilt* $\max\ \mathrm{pcf}(a) = \mathrm{cf}(\prod a)$.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über $\lambda := \max\ \mathrm{pcf}(a)$.
Nach Lemma 4.20 ist $a \in \mathcal{J}_{<\lambda^+}(a) \setminus \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$. Nach Lemma 4.19 gibt es also eine Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$, die modulo $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ kofinal in $\prod a$ liegt. Ist $S \subseteq \prod a$ mit $|S| < \lambda$, so finden wir wegen der Regularität von λ ein $\alpha < \lambda$ mit $g <_{\mathcal{J}_{<\lambda}(a)} f_\alpha$ (also *nicht* $f_\alpha \leq g$) für alle $g \in S$. S ist also keine kofinale Teilmenge von $\prod a$. Dies beweist „$\leq$".
Für die andere Richtung nehmen wir o.B.d.A. $|a|^+ < \lambda$ an. (Sonst ist $a = \{\lambda\}$.) Wir wählen uns ein $g \in \prod a$ wie in Lemma 3.19 (für id_a statt f). Dazu gibt es ein $\alpha^* < \lambda$ mit $g <_{\mathcal{J}_{<\lambda}(a)} f_{\alpha^*}$. Dann ist $\mathrm{B}[f_\alpha, g] \in \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ für alle $\alpha \in [\alpha^*, \lambda)_{\mathrm{ON}}$.
Ist $c \in \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$, so ist $\max\ \mathrm{pcf}(c) < \lambda$ nach Korollar 4.7. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es somit eine kofinale Teilmenge F_c von $\prod c$ mit $|F_c| < \lambda$. Nun können wir eine Menge $F \subseteq \prod a$ durch

$$F := \{f_\alpha \restriction (a \setminus c) \cup h : \alpha \in [\alpha^*, \lambda)_{\mathrm{ON}} \wedge c = \mathrm{B}[f_\alpha, g] \wedge h \in F_c\}$$

definieren. Offenbar gilt $|F| \leq \lambda \cdot \sup\{|F_c| : c \in \mathcal{J}_{<\lambda}(a)\} = \lambda$. Wir zeigen, daß F kofinale Teilmenge von $\prod a$ ist:
Sei $k \in \prod a$ und o.B.d.A. $g \leq k$. Nach Wahl von g finden wir ein $\alpha \in [\alpha^*, \lambda)_{\mathrm{ON}}$ mit $c := \mathrm{B}[f_\alpha, g] = \mathrm{B}[f_\alpha, k]$. Wählen wir ein $h \in F_c$ mit $k \restriction c < h$, so gilt offenbar $k < f_\alpha \restriction (a \setminus c) \cup h \in F$. ■

Wir nennen eine Folge $(b_\lambda : \lambda \in \mathrm{pcf}(a))$ eine **Generatorenfolge für** a, wenn für alle $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$ das Ideal $\mathcal{J}_{<\lambda^+}(a)$ über $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ von b_λ erzeugt wird. Ein wesentliches Resultat der pcf-Theorie ist:

Satz 4.23. *Ist a progressiv, so gibt eine Generatorenfolge für a.*

Einen Beweis hierfür findet man z.B. in [BM, 7.9].

Bemerkung. Generatorenfolgen sind nicht eindeutig bestimmt. Allerdings gilt offenbar: Sind $(b_\lambda : \lambda \in \mathrm{pcf}(a))$ und $(b'_\lambda : \lambda \in \mathrm{pcf}(a))$ Generatorenfolgen für a, so sind für alle $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$ die Mengen b_λ und b'_λ modulo $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ gleich.

Wir werden im folgenden immer voraussetzen, daß das letzte Glied einer Generatorenfolge die Menge a selbst ist. Dies ist nach Lemma 4.20 keine Einschränkung. Aus Lemma 4.19 und Korollar 4.7 folgt sofort:

Lemma 4.24. *Sei a progressiv, $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$ und b_λ eine Teilmenge von a, die $\mathcal{J}_{<\lambda^+}(a)$ über $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ erzeugt. Dann ist* $\max\ \mathrm{pcf}(b_\lambda) = \lambda$.

Generatoren liefern uns ein weiteres Ergebnis, das die Bedeutung des Ideals $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ erklärt:

Satz 4.25. *Sei a progressiv, $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$ und b_λ eine Teilmenge von a, die $\mathcal{J}_{<\lambda^+}(a)$ über $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ erzeugt. Dann ist $\mathcal{J}_{<\lambda}(a) \restriction b_\lambda$ das kleinste Ideal I auf a derart, daß* $\mathrm{tcf}(\prod a/I) = \lambda$ *ist.*

Beweis. Zunächst gilt sicher

$$\mathrm{tcf}(\prod a/(\mathcal{J}_{<\lambda}(a) \restriction b_\lambda)) = \lambda$$

nach Lemma 4.19.
Sei nun I ein Ideal auf a mit $\mathrm{tcf}(\prod a/I) = \lambda$. Für jede I-positive Menge b läßt sich $I \restriction b$ zu einem Ultrafilter D auf a erweitern, für den natürlich $\mathrm{cf}(\prod a/D) = \lambda$ gelten muß. Nach Lemma 4.6 folgt $b \notin \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$. Damit haben wir $\mathcal{J}_{<\lambda}(a) \subseteq I$ gezeigt.
Wir müssen nun noch $a \setminus b_\lambda \in I$ zeigen. Angenommen, dies gilt nicht. Dann wählen wir einen Ultrafilter D auf a mit $D \cap I = \emptyset$ und $a \setminus b_\lambda \in D$. Es gilt $\mathrm{cf}(\prod a/D) = \lambda$. Nach Korollar 4.12 gibt es ein $b \in \mathcal{J}_{<\lambda^+}(a) \cap D$. Nach Wahl von b_λ ist $b \subseteq_{\mathcal{J}_{<\lambda}(a)} b_\lambda$. Nach dem letzten Absatz ist D als Erweiterung von I auch Erweiterung von $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ und somit $b \subseteq_D b_\lambda$. Es folgt der Widerspruch $b_\lambda \in D$. ■

Korollar 4.26. *Sei a progressiv, $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$ und b_λ eine Teilmenge von a, die $\mathcal{J}_{<\lambda^+}(a)$ über $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ erzeugt. Dann ist $\lambda \notin \mathrm{pcf}(a \setminus b_\lambda)$.*

Das letzte Resultat in diesem Abschnitt entspricht [BM, 4.9], wird hier jedoch mit etwas anderen Methoden bewiesen.

Korollar 4.27. *Ist a progressiv und $(b_\lambda : \lambda \in \mathrm{pcf}(a))$ eine Generatorenfolge für a, so gibt es für alle $c \subseteq a$ ein $n \in \omega$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathrm{pcf}(c)$ mit*

(i) $\max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \max\ \mathrm{pcf}(c)$

(ii) $c \subseteq b_{\lambda_1} \cup \cdots \cup b_{\lambda_n}$

Beweis. Sei $c_0 := c$. Für $n < \omega$ definieren wir rekursiv

$$c_{n+1} := \begin{cases} c_n \setminus b_{\max\ \mathrm{pcf}(c_n)} & c_n \neq \emptyset \\ \emptyset & c_n = \emptyset. \end{cases}$$

Nach Korollar 4.26 ist $\max\ \mathrm{pcf}(c_{n+1}) < \max\ \mathrm{pcf}(c_n)$, falls $c_{n+1} \neq \emptyset$ ist. Daher muß es ein (minimales) $n < \omega$ mit $c_n = \emptyset$ geben. Wir setzen dann $\lambda_{i+1} := \max\ \mathrm{pcf}(c_i)$ für $i < n$. ■

5 Elementare Unterstrukturen von $\mathrm{H}(\Theta)$

5.1 Die Mengen $\mathrm{H}(\Theta)$

Eine Menge x heißt bekanntlich **transitiv**, wenn $\bigcup x \subseteq x$ gilt. Wir nennen x **super-transitiv**, wenn $z \in x$ aus $z \subseteq y \in x$ folgt. Mit $\mathrm{tc}(x)$ bezeichnen wir die **transitive Hülle** von x, also die kleinste transitive Obermenge von x. Für jede unendliche Kardinalzahl Θ sei

$$\mathrm{H}(\Theta) := \{x : |\,\mathrm{tc}(x)| < \Theta\}$$

die Klasse der Mengen, die **erblich** von einer Kardinalität kleiner als κ sind.

Lemma 5.1. *Für alle Mengen x ist $\mathrm{tc}(x) = x \cup \bigcup\{\mathrm{tc}(y) : y \in x\}$.*

Beweis. [Ku, III 3.5] Sei $a := x \cup \bigcup\{\mathrm{tc}(y) : y \in x\}$. Ist $z \in y \in a$, so ist $y \in x$, also $z \in y \subseteq \mathrm{tc}(y) \subseteq a$, oder $y \in \mathrm{tc}(u)$ für ein $u \in x$, also $z \in \mathrm{tc}(u) \subseteq a$, da $\mathrm{tc}(u)$ transitiv ist. Folglich ist a transitive Obermenge von x. Ist b eine transitive Obermenge von x und $y \in x$, so ist $y \subseteq b$, also auch $\mathrm{tc}(y) \subseteq b$. Daher ist $a \subseteq b$. ■

Lemma 5.2. *Für jede unendliche Kardinalzahl Θ gilt:*

(i) $\mathrm{H}(\Theta)$ *ist transitiv.*

(ii) $\mathrm{H}(\Theta)$ *ist super-transitiv.*

(iii) $\mathrm{H}(\Theta) \cap \mathrm{ON} = \Theta$

Beweis. [Ku, IV 6.4] Ist $y \in x$ oder $y \subseteq x$, so gilt $\mathrm{tc}(y) \subseteq \mathrm{tc}(x)$. Dies liefert die ersten beiden Aussagen. Die dritte folgt aus der Tatsache, daß alle Ordinalzahlen transitiv sind. ■

Lemma 5.3. *Ist Θ regulär, so ist $\mathrm{H}(\Theta) = \{x \subseteq \mathrm{H}(\Theta) : |x| < \Theta\}$.*

Beweis. [Ku, IV 6.4] Sei $x \in \mathrm{H}(\Theta)$. Dann ist $|\,\mathrm{tc}(x)| < \Theta$. Nach Lemma 5.2 ist $x \subseteq \mathrm{H}(\Theta)$. Wegen $x \subseteq \mathrm{tc}(x)$ ist damit die eine Inklusion gezeigt. Sei umgekehrt $x \subseteq \mathrm{H}(\Theta)$ und $|x| < \Theta$. Dann ist $|\,\mathrm{tc}(y)| < \Theta$ für alle $y \in x$, also nach Lemma 5.1

$$|\,\mathrm{tc}(x)| = |x \cup \bigcup\{\mathrm{tc}(y) : y \in x\}| < \Theta,$$

da Θ regulär ist. ■

Korollar 5.4. *Sei* Θ *regulär, und seien* $x, y \in \mathrm{H}(\Theta)$*. Dann sind auch* $\{x, y\}$ *und* $\bigcup x$ *Elemente von* $\mathrm{H}(\Theta)$*.*

Mit V_κ bezeichnen wir die entsprechende von Neumannsche Stufe (s. [Je1, p. 71]).

Lemma 5.5. *Ist* κ *eine unendliche Kardinalzahl, so ist* $\mathrm{H}(\kappa) \subseteq \mathrm{V}_\kappa$*; insbesondere ist* $\mathrm{H}(\kappa)$ *also eine Menge.*

Beweis. Sei zunächst κ regulär. Wir beweisen die Behauptung durch $\in$-Induktion: Sei $x \in \mathrm{H}(\kappa)$. Nach obigem Lemma ist dann $x \subseteq \mathrm{H}(\kappa)$ und $|x| < \kappa$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $x \subseteq V_\kappa$. Wegen der Regularität von κ folgt $x \in V_\kappa$. Ist κ singulär, so folgt mit dem eben bewiesenen

$$\mathrm{H}(\kappa) = \bigcup\{\mathrm{H}(\Theta) : \Theta \in [\aleph_0, \kappa)_{\mathrm{reg}}\} \subseteq \bigcup\{V_\Theta : \Theta \in [\aleph_0, \kappa)_{\mathrm{reg}}\} = V_\kappa. \qquad \blacksquare$$

ZFC^- sei das Axiomensystem ZFC ohne das Potenzmengenaxiom.

Satz 5.6. *Ist* $\Theta > \omega$ *regulär, so ist* $\mathrm{H}(\Theta)$ *ein Modell von* ZFC^-*.*

Bemerkung. Wir folgen hier der üblichen Konvention und identifizieren die Struktur $(\mathrm{H}(\Theta), \in)$ mit ihrem Individuenbereich $\mathrm{H}(\Theta)$.

Beweis. [Ku, IV 6.5] Zunächst ist $\mathrm{H}(\Theta)$ transitiv und erfüllt deshalb das Extensionalitätsaxiom. Da das Fundierungsaxiom und das Auswahlaxiom „außen“ gelten, gelten sie auch in $\mathrm{H}(\Theta)$. Paarmengen- und Vereinigungsmengenaxiom gelten, weil $\mathrm{H}(\Theta)$ nach Korollar 5.4 abgeschlossen gegen die entsprechenden Operationen ist. Das Aussonderungsaxiom gilt, weil $\mathrm{H}(\Theta)$ super-transitiv ist, das Ersetzungsaxiom wegen der Charakterisierung in Lemma 5.3 und das Unendlichkeitsaxiom wegen $\omega \in \mathrm{H}(\Theta)$. $\blacksquare$

5.2 Absolutheit

Schreiben wir eine Formel φ in der Form $\varphi(\vec{x})$, so bedeutet dies, daß alle freien Variablen von φ unter $\vec{x}$ vorkommen. Die Schreibweise $\forall \vec{x} \varphi$ soll stets implizieren, daß über alle freien Variablen von φ quantifiziert wird. ZFC-**Formeln** sind Formeln, die als einziges nichtlogisches Symbol das zweistellige Relationszeichen $\in$ enthalten.

Lemma 5.7. *Sei $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ eine* ZFC*-Formel, Θ regulär und N eine elementare Unterstruktur von* $\mathrm{H}(\Theta)$*. $a_1, \ldots, a_n$ seien Elemente von N mit*

$$\forall a \in \mathrm{H}(\Theta)\ (\varphi(a, a_1, \ldots, a_n) \iff \mathrm{H}(\Theta) \models \varphi(a, a_1, \ldots, a_n)) \tag{2}$$

Dann gilt:

(i) $\exists a \in \mathrm{H}(\Theta)\ \varphi(a, a_1, \ldots, a_n) \implies \exists b \in N\ \varphi(b, a_1, \ldots, a_n)$

(ii) $\exists! a \in \mathrm{H}(\Theta)\ \varphi(a, a_1, \ldots, a_n) \implies a \in N$

(iii) *Ist $<^*$ eine Wohlordnung von* $\mathrm{H}(\Theta)$*, $(N, \in, <^*)$ elementare Unterstruktur von $(\mathrm{H}(\Theta), \in, <^*)$ und a das $<^*$-kleinste Element von* $\mathrm{H}(\Theta)$*, für das*

$$\mathrm{H}(\Theta) \models \varphi(a, a_1, \ldots, a_n)$$

gilt, so ist $a \in N$.

Beweis. Sei $a \in \mathrm{H}(\Theta)$ mit $\varphi(a, a_1, \ldots, a_n)$. Nach (2) gilt $\mathrm{H}(\Theta) \models \varphi(a, a_1, \ldots, a_n)$, also gilt $\exists x\ \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)$ in $\mathrm{H}(\Theta)$. Da N elementare Unterstruktur von $\mathrm{H}(\Theta)$ ist, gilt diese Formel auch in N, d.h. es gibt ein $b \in N$ mit $N \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n)$. Es folgt $\mathrm{H}(\Theta) \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n)$ und damit $\varphi(b, a_1, \ldots, a_n)$.
Die Gültigkeit der zweiten Behauptung ist nun offensichtlich, die der dritten beweist man mit der Formel

$$(\varphi \wedge \forall x_{n+1} <^* x_0\ \neg\varphi(x_{n+1}))(a_1, \ldots, a_n). \qquad \blacksquare$$

Bemerkung. Offensichtlich gehen hier keine speziellen Eigenschaften von $\mathrm{H}(\Theta)$ ein. Für unsere Zwecke ist es jedoch nicht nötig, das Lemma allgemeiner zu formulieren.

Eine ZFC-Formel $\varphi(\vec{x})$ heißt **absolut** für eine Struktur M, falls gilt:

$$\forall \vec{x} \in M(\varphi \iff M \models \varphi).$$

Ist $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ absolut für $\mathrm{H}(\Theta)$, so gilt Gleichung (2) für *alle* $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{H}(\Theta)$. Da das eben bewiesene Lemma im folgenden eine zentrale Rolle spielen wird (obwohl wir es im allgemeinen nicht zitieren werden), versuchen wir nun, eine möglichst große Klasse von Formeln anzugeben, die absolut für gewisse $\mathrm{H}(\Theta)$ sind:
Wir definieren induktiv den Begriff der **Δ_0-Formel**:

- Jede atomare Formel der Form $x \in y$ oder $x = y$ ist eine Δ_0-Formel.
- Sind φ und ψ Δ_0-Formeln, so sind auch $\neg\varphi$ und $(\varphi \vee \psi)$ Δ_0-Formeln.
- Ist φ eine Δ_0-Formel, dann ist auch jede Formel der Form $\exists x \in y\ \varphi$ eine Δ_0-Formel.

Ist φ eine Δ_0-Formel, so heißt jede Formel der Art $\exists x_1 \dots \exists x_n\ \varphi$ **Σ_1-Formel**. (Dabei ist $n = 0$ zugelassen, insbesondere sind also Δ_0-Formeln Σ_1-Formeln.) Ist $T \subseteq \mathrm{ZFC}$ eine *Theorie* (also eine Menge von Formeln), so heißt φ **Δ_0^T-Formel** bzw. **Σ_1^T-Formel**, wenn es eine Δ_0-Formel bzw. eine Σ_1-Formel ψ gibt mit:

$$T \vdash \varphi \iff \psi.$$

Lemma 5.8. *Sei M eine transitive Struktur. Dann gilt:*

(i) *Jede atomare* ZFC*-Formel ist absolut für M.*

(ii) *Sind die* ZFC*-Formeln φ und ψ absolut für M, so auch $\neg\varphi$ und $\varphi \vee \psi$.*

(iii) *Ist die* ZFC*-Formel φ absolut für M, so auch jede Formel der Form $\exists x \in y\ \varphi$.*

Beweis. [Ku, IV 3.2 & 3.4] Nach Definition des Gültigkeitsbegriffs sind die Formeln $x = y$ und $x \in y$ absolut für M. Der zweite Teil ergibt sich mit aussagenlogischen Argumenten. Ist φ absolut für M, so ist wegen der Transitivität von M auch $\exists x \in y\ \varphi$ absolut für M. ■

Satz 5.9 (Levy). *Ist Θ überabzählbare Kardinalzahl, so ist jede Σ_1-Formel absolut für* $\mathrm{H}(\Theta)$.

Beweis. [Dr, 3.7.4] Nach Lemma 5.8 sind Δ_0-Formeln absolut für $\mathrm{H}(\Theta)$. Daher reicht es, die Behauptung für Σ_1-Formeln der Form $\exists x\varphi$ zu beweisen. Wir führen eine Induktion über die Anzahl der unbeschränkten Quantifizierungen in φ durch: Für den Induktionsanfang ist φ eine Δ_0-Formel. Seien also $a_1, \dots, a_n$ Elemente von $\mathrm{H}(\Theta)$, so daß $\exists x\varphi(x, a_1, \dots, a_n)$ gilt. Wir wollen $\mathrm{H}(\Theta) \models \exists x\varphi(x, a_1, \dots, a_n)$ zeigen. O.B.d.A. können wir offenbar $\Theta = \kappa^+$ für eine unendliche Kardinalzahl κ annehmen, denn für Limeskardinalzahlen $\Theta > \omega$ gilt

$$\mathrm{H}(\Theta) = \bigcup\{\mathrm{H}(\kappa^+) : \omega \leq \kappa < \Theta\}.$$

Wir wählen ein beliebiges a mit $\varphi(a, a_1, \ldots, a_n)$. Nach dem Reflektionsprinzip ([Je1, Theorem 29]) gibt es ein $\alpha \in \mathrm{ON}$ mit $a, a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{V}_\alpha$ und $\mathrm{V}_\alpha \models \varphi(a, a_1, \ldots, a_n)$. Wegen $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{H}(\kappa^+)$ finden wir nach dem Satz von Skolem-Löwenheim eine elementare Unterstruktur Y von V_α mit

$$|Y| \leq \kappa \wedge \mathrm{tc}(\{a_1, \ldots, a_n\}) \cup \{a\} \subseteq Y.$$

Da V_α extensional ist, ist auch Y extensional, also gibt es nach dem Kollabierungslemma von Mostowski ([Je1, Theorem 28]) eine transitive Menge Y' und einen $\in$-Isomorphismus π von Y auf Y'. Wegen $\mathrm{tc}(\{a_1, \ldots, a_n\}) \subseteq Y$ ist $\pi(a_i) = a_i$ für $i = 1, \ldots, n$, also gilt $Y' \models \varphi(\pi(a), a_1, \ldots, a_n)$. Da Y' transitiv und φ Δ_0-Formel ist, gilt $\varphi(\pi(a), a_1, \ldots, a_n)$ nach Lemma 5.8. Ferner ist $|Y'| = |Y| \leq \kappa$, also $Y' \in \mathrm{H}(\kappa^+)$. Wegen der Transitivität von $\mathrm{H}(\kappa^+)$ folgt $\pi(a) \in \mathrm{H}(\kappa^+)$.
Für den Induktionsschluß sei φ von der Form $\exists y \psi$. Ist u eine neue Variable und

$$\chi :\equiv \exists x \in u \, \exists y \in u \, \psi,$$

so gilt

$$\exists u \in \mathrm{H}(\Theta) \, \chi \iff \exists x \in \mathrm{H}(\Theta) \, \exists y \in \mathrm{H}(\Theta) \, \psi,$$

da $\mathrm{H}(\Theta)$ transitiv und abgeschlossen gegen die Bildung von Paarmengen ist. Auf $\exists u \chi$ läßt sich offenbar die Induktionsvoraussetzung anwenden. ■

In diesem Zusammenhang zitieren wir auch noch [Ku, IV 3.7]:

Lemma 5.10. *Seien φ und ψ ZFC-Formeln. Ist M Modell einer Theorie $T \subseteq$ ZFC und gilt $T \vdash \varphi \iff \psi$, so ist φ genau dann absolut für M, wenn ψ absolut für M ist.*

Damit ist klar, daß jede $\Sigma_1^{\mathrm{ZFC}^-}$-Formel absolut für $\mathrm{H}(\Theta)$ ist, wenn $\Theta > \omega$ regulär ist. Weitere Resultate zur Absolutheit finden sich z.B. in [Ku, IV].
Wir werden nun anhand einiger typischer Beispiele zeigen, wie wir die eben präsentierten Eigenschaften von $\mathrm{H}(\Theta)$ in Zukunft benutzen werden. Θ sei jeweils regulär und überabzählbar.

Beispiel A. Sei N eine elementare Unterstuktur von $\mathrm{H}(\Theta)$ und $a \in N$. $|x| \geq |y|$ ist eine $\Sigma_1^{\mathrm{ZFC}^-}$-Formel, denn sie ist bzgl. ZFC^- äquivalent zu

$$\exists f\ (f : x \longrightarrow y \wedge \mathrm{Wb}(f) = y),$$

und damit zu einer Σ_1-Formel, wie man sich leicht überlegt. Die Formel $x = |y|$ ist äquivalent zu

$$|x| \geq |y| \wedge x \in \mathrm{ON} \wedge \forall z \in x\ \neg(|z| \geq |y|)$$

und damit nach Lemma 5.8 und Satz 5.9 absolut für $\mathrm{H}(\Theta)$. Da $|a|$ eine eindeutig bestimmte Menge ist und in $\mathrm{H}(\Theta)$ liegt, ist $|a| \in N$ nach Lemma 5.7.

Beispiel B. Sei $<^*$ eine Wohlordnung von $\mathrm{H}(\Theta)$. $(M, \in, <^*)$ und $(N, \in, <^*)$ seien elementare Unterstrukturen von $(\mathrm{H}(\Theta), \in, <^*)$ und a eine Menge, die Element von M *und* N ist. Nach dem obigen Beispiel liegt auch $|a|$ in M und N. Jede Bijektion von $|a|$ auf a liegt nach Lemma 5.3 offenbar in $\mathrm{H}(\Theta)$. Also gibt es eine $<^*$-minimale Bijektion h von $|a|$ auf a in $\mathrm{H}(\Theta)$. Man überlegt sich leicht, daß „x ist Bijektion von y auf z" eine $\Delta_0^{\mathrm{ZFC}^-}$-Formel, also absolut für $\mathrm{H}(\Theta)$ ist. Nach Lemma 5.7 liegt h sowohl in M als auch in N.

Um so wie hier vorgehen zu können, *werden wir in Zukunft immer davon ausgehen, daß eine Wohlordnung* $<^*$ *von* $\mathrm{H}(\Theta)$ *mit zur Struktur* $\mathrm{H}(\Theta)$ *gehört.*
Ein etwas komplizierteres Beispiel ist das folgende:

Beispiel C. Die Formel $x_0 = \mathrm{pcf}(x_1)$ ist im allgemeinen *nicht* absolut für $\mathrm{H}(\Theta)$. Ist etwa $\Theta = \aleph_{\omega+1}$, $2^{\aleph_0} = \Theta$ und $a = \{\aleph_n : n < \omega\}$, so ist $a \in \mathrm{H}(\Theta)$, jeder Ultrafilter auf a hat aber die Mächtigkeit Θ und liegt damit nicht in $\mathrm{H}(\Theta)$. Es folgt $\mathrm{H}(\Theta) \models \mathrm{pcf}(a) = \emptyset$.
Kennt man a vorher, so kann man Θ jedoch groß genug wählen: Ist a eine Menge von regulären Kardinalzahlen und $\Theta > \max\ \mathrm{pcf}(a)$ regulär (etwa $\Theta > 2^{2^{\sup a}}$), so erfüllt die Formel $x_0 = \mathrm{pcf}(x_1)$ für den Parameter $a \in \mathrm{H}(\Theta)$ die Voraussetzung (2) von Lemma 5.7. Die Formeln

„x ist Ultrafilter auf y"

und

„x ist modulo y kofinale Folge der Länge z in $\prod w$"

sind nämlich absolut für $\mathrm{H}(\Theta)$, und alle Ultrafilter auf a, alle Folgen in $\prod a$ und alle Elemente von $\mathrm{pcf}(a)$ sind Elemente von $\mathrm{H}(\Theta)$. Nach Lemma 5.7 ist $\mathrm{pcf}(a)$ somit Element von N, falls N elementare Unterstruktur von $\mathrm{H}(\Theta)$ mit $a \in N$ ist.

Schlußweisen wie die hier vorgeführten werden wir von nun an regelmäßig ohne weiteren Hinweis benutzen. Der Leser möge sich darauf verlassen, daß Θ jeweils so groß gewählt wurde, daß keine Probleme entstehen.

5.3 Approximationsfolgen

Bis zum Ende dieses Kapitels sei Θ immer überabzählbar und regulär.
Sei M eine beliebige Menge und a eine Menge von Ordinalzahlen. Eine Funktion D **charakterisiert** M **über** a, wenn gilt:

- $M \cap a \subseteq \mathrm{Db}(D)$,
- $\forall \delta \in M \cap a$ ($D(\delta)$ ist unbeschränkte Teilmenge von $M \cap [\min a, \delta)_{\mathrm{ON}}$).

Das folgende Lemma zeigt die Bedeutung dieser Definition:

Lemma 5.11. *Sei $a \subseteq \mathrm{H}(\Theta)$ ein Intervall von regulären Kardinalzahlen, und seien M und N elementare Unterstrukturen von $\mathrm{H}(\Theta)$ mit*

(i) $M \cap \min a \subseteq N$

(ii) $M \cap a \subseteq N$

(iii) *Es gibt eine Folge von Teilmengen von N, die M über a charakterisiert.*

Dann ist $M \cap \sup a \subseteq N$.

Beweis. Sei $(D_\delta : \delta \in a \cap M)$ eine charakterisierende Folge für M über a mit $D_\delta \subseteq N$ für alle $\delta \in a \cap M$. Wir zeigen $M \cap \lambda \subseteq N$ für alle Kardinalzahlen $\lambda \leq \sup a$ durch Induktion über λ:
Für $\lambda = \min a$ gilt die Aussage nach (i). Ist λ eine Limeskardinalzahl, so folgt die Aussage aus der Induktionsvoraussetzung. Sei also $\lambda \in [\min a, \sup a)_{\mathrm{CN}}$ mit $M \cap \lambda \subseteq N$. Wir zeigen $M \cap \lambda^+ \subseteq N$:
Sei $\alpha \in M \cap \lambda^+$ und O.B.d.A. $\alpha \geq \lambda$. Mit den Methoden des letzten Abschnittes folgt $\lambda = |\alpha| \in M$ und auch $\lambda^+ \in M$. Sicher ist λ^+ ein Element von A. Nach (ii)

ist $\lambda^+ \in N$, also auch $\lambda \in N$. Nach Voraussetzung gibt es ein $\beta \in D_{\lambda^+}$ mit $\alpha < \beta$, und es ist $\beta \in M \cap N \cap \lambda^+$. Da $|\beta| = \lambda$ ist, gibt es eine $<^*$-minimale Bijektion h von λ auf β, die in M und in N liegen muß.
Da die Formel

$$\varphi(x, y, z) :\equiv \text{„}x \text{ ist Bijektion von } y \text{ auf } z\text{“}$$

eine $\Delta_0^{\mathrm{ZFC}^-}$-Formel, also absolut für $\mathrm{H}(\Theta)$ ist, gilt $M \models \varphi(h, \lambda, \beta)$. Dies bedeutet, daß $h \restriction (M \cap \lambda)$ eine Bijektion von $M \cap \lambda$ auf $M \cap \beta$ ist. Analog gilt dies auch für N. Nach Induktionsvoraussetzung folgt nun

$$\alpha \in M \cap \beta = h[M \cap \lambda] \subseteq h[N \cap \lambda] = N \cap \beta,$$

insbesondere also $\alpha \in N$. ■

Die Menge $M \cap \sup a$ wird hier also ausreichend durch $M \cap \min a$, $M \cap a$ und eine entsprechende charakterisierende Folge beschrieben. Dies erlaubt eine Abschätzung der Anzahl der Mengen von der Art $M \cap \sup a$:

Lemma 5.12. *Sei $a \subseteq \mathrm{H}(\Theta)$ ein Intervall regulärer Kardinalzahlen, μ eine unendliche Kardinalzahl und $\mathfrak{D}$ eine beliebige Menge. Wir nennen eine elementare Unterstruktur M von $\mathrm{H}(\Theta)$* schön*, wenn $|M| \leq \mu$ ist und es eine Folge gibt, die M über a charakterisiert und Element von $\mathfrak{D}$ ist. Dann gilt:*

$$|\{M \cap \sup a : M \textit{ schön}\}| \leq |\min a|^\mu \cdot |a|^\mu \cdot |\mathfrak{D}|.$$

Beweis. Sind M und N elementare Unterstrukturen von $\mathrm{H}(\Theta)$ mit $M \cap \min a = N \cap \min a$ und $M \cap a = N \cap a$ und werden M und N durch eine gemeinsame Folge D über a charakterisiert, so ist $M \cap \sup a = N \cap \sup a$ nach Lemma 5.11. Wegen $|M| \leq \mu$ für alle schönen M gibt es nur $|\min a|^\mu$ viele Möglichkeiten für $M \cap \min a$ und $|a|^\mu$ viele Möglichkeiten für $M \cap a$. Somit folgt offenbar die Behauptung des Lemmas. ■

Angesichts dieser Resultate stellt sich die Frage, ob es überhaupt möglich ist, „schöne“ Strukturen zu finden. Dazu entwickeln wir die folgenden Begriffe:
Für jede Menge M definieren wir die **charakteristische Funktion χ_M von M** durch

$$\chi_M(\alpha) := \sup(M \cap \alpha)$$

für $\alpha \in \mathrm{ON}$.

Eine Folge $(N_i : i < \gamma)$ von Unterstrukturen von $\mathrm{H}(\Theta)$ heißt **Approximationsfolge in** $\mathrm{H}(\Theta)$, falls gilt:

- Ist $i + 1 < \gamma$, so ist N_i elementare Unterstruktur von N_{i+1}.
- Ist $i < \gamma$ eine Limeszahl, so ist $N_i = \bigcup\{N_j : j < i\}$.
- Ist $i + 1 < \gamma$, so ist $(N_j : j \leq i) \in N_{i+1}$.

(Die ersten beiden Eigenschaften besagen gerade, daß eine Approximationsfolge insbesondere eine stetige elementare Kette ist.)

Mit Hilfe des Satzes von Skolem-Löwenheim ist es kein Problem, Approximationsfolgen rekursiv zu definieren. Es gilt offenbar:

Lemma 5.13. *Ist $\mu < \Theta$ eine unendliche Kardinalzahl und $\sigma \leq \mu^+$, so gibt es für alle $X \in \mathrm{H}(\Theta)$ mit $|X| \leq \mu$ eine Approximationsfolge $(N_i : i < \sigma)$ mit $X \subseteq N_0$ und $|N_i| \leq \mu$ für alle $i < \sigma$.*

Das folgende Lemma wird später ein Hilfsmittel sein, um charakterisierende Folgen zu konstruieren. (Man beachte, daß jeder Teilclub von C unbeschränkte Teilmenge von $N_\lambda \cap \kappa$ ist.)

Lemma 5.14. *Sei $\lambda < \Theta$ eine Limeszahl und $(N_i : i \leq \lambda)$ eine Approximationsfolge in $\mathrm{H}(\Theta)$. $\kappa \in N_0$ sei eine Limeszahl und $|N_i| < \mathrm{cf}(\kappa)$ für alle $i < \lambda$. Dann gilt:*

(i) $\forall i < \lambda \; (\chi_{N_i}(\kappa) \in N_{i+1} \cap \kappa)$

(ii) *$(\chi_{N_i}(\kappa) : i < \lambda)$ ist eine Normalfunktion mit Werten in $N_\lambda \cap \kappa$ und dem Supremum $\chi_{N_\lambda}(\kappa)$. Insbesondere ist*

$$\mathrm{cf}(\chi_{N_\lambda}(\kappa)) = \mathrm{cf}(\lambda).$$

Beweis. Sei $i < \lambda$. Da $(N_j : j < \lambda)$ eine Approximationsfolge ist, ist

$$f := (N_i : j \leq i) \in N_{i+1}$$

und damit $N_i = f(\max\ \mathrm{Db}(f)) \in N_{i+1}$ (mit den Methoden des letzten Abschnittes). Ferner ist $\kappa \in N_0 \subseteq N_{i+1}$ und damit (mit analogen Argumenten) $\chi_{N_i}(\kappa) \in N_{i+1}$. Wegen $|N_i| < \mathrm{cf}(\kappa)$ folgt die erste Behauptung.
Da mit jedem $\alpha \in N_{i+1}$ auch $\alpha + 1$ Element von N_{i+1} ist, muß $\chi_{N_i}(\kappa)$ kleiner als $\chi_{N_{i+1}}(\kappa)$ sein. Ist $i \leq \lambda$ eine Limeszahl, so gilt wegen der Stetigkeit von Approximationsfolgen

$$\begin{aligned}\sup\{\chi_{N_j}(\kappa) : j < i\} &= \bigcup\{\bigcup(N_j \cap \kappa) : j < i\} \\ &= \bigcup(\bigcup\{N_j : j < i\} \cap \kappa) = \bigcup(N_i \cap \kappa) = \chi_{N_i}(\kappa).\end{aligned}$$

$(\chi_{N_i}(\kappa) : i < \lambda)$ ist also eine in $\chi_{N_\lambda}(\kappa)$ kofinale Normalfunktion, deren Werte alle in $N_\lambda \cap \kappa$ liegen. Damit folgt die zweite Aussage. ∎

5.4 Die Skolemhülle in $\mathrm{H}(\Theta)$

L-**Formeln** seien solche, die zu $\mathrm{H}(\Theta)$ passen, also solche, deren nichtlogische Symbole nur $\in$ und $<^*$ sind. Jeder L-Formel $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ ordnen wir eine neue L-Formel φ^* zu. Dies sei die Formel

$$\varphi(x_0, \ldots, x_n) \wedge \forall x_{n+1}(x_{n+1} <^* x_0 \implies \neg\varphi(x_{n+1}, x_1, \ldots, x_n)).$$

Gilt $\mathrm{H}(\Theta) \models \varphi^*(a_0, \ldots, a_n)$, so ist a_0 also das $<^*$-kleinste $a \in \mathrm{H}(\Theta)$ mit $\mathrm{H}(\Theta) \models \varphi(a, a_1, \ldots, a_n)$.
Eine praktische Konsequenz der Hinzunahme der Wohlordnung $<^*$ ist das folgende Lemma. (Siehe auch (iii) in Lemma 5.7.)

Lemma 5.15. *Sei $\mathfrak{N}$ eine nichtleere Menge von elementaren Unterstrukturen von $\mathrm{H}(\Theta)$. Dann ist $\bigcap\mathfrak{N}$ eine elementare Unterstruktur von $\mathrm{H}(\Theta)$.*

Beweis. Sicher ist $\bigcap\mathfrak{N} \neq \emptyset$, da z.B. $\emptyset$ Element jeder elementaren Unterstruktur von $\mathrm{H}(\Theta)$ ist. Außerdem ist $\bigcap\mathfrak{N}$ natürlich Unterstruktur von $\mathrm{H}(\Theta)$. Seien nun $a_1, \ldots, a_n \in \bigcap\mathfrak{N}$ und $b \in \mathrm{H}(\Theta)$ mit

$$\mathrm{H}(\Theta) \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n)$$

für eine L-Formel φ. Wir müssen zeigen, daß es einen solchen „Erfüller“ b in $\bigcap\mathfrak{N}$ gibt.
Nun gibt es genau ein $a \in \mathrm{H}(\Theta)$ mit $\mathrm{H}(\Theta) \models \varphi^*(a, a_1, \ldots, a_n)$. Ist $N \in \mathfrak{N}$, so gilt $a_1, \ldots, a_n \in N$, und damit ist $a \in N$. Es folgt $a \in \bigcap\mathfrak{N}$. ∎

Dieses Lemma rechtfertigt die folgende Definition: Ist $X \subseteq \mathrm{H}(\Theta)$, so ist

$$\mathrm{Sk}_\Theta(X) := \bigcap\{N \preceq \mathrm{H}(\Theta) : X \subseteq N\}$$

die **Skolem-Hülle** von X. Offenbar ist Sk_Θ ein Hüllenoperator auf $\mathrm{H}(\Theta)$, und $\mathrm{Sk}_\Theta(X)$ ist die kleinste elementare Unterstruktur von $\mathrm{H}(\Theta)$, die Obermenge von X ist.

Für jede L-Formel $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ sei nun f_φ die Funktion von $\mathrm{H}(\Theta)^n$ in $\mathrm{H}(\Theta)$, die jedem Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ das $<^*$-minimale $a \in \mathrm{H}(\Theta)$ mit $\mathrm{H}(\Theta) \models \varphi(a, a_1, \ldots, a_n)$ zuordnet, also das eindeutig bestimmte a mit $\mathrm{H}(\Theta) \models \varphi^*(a, a_1, \ldots, a_n)$, falls solch ein a existiert; anderenfalls sei der Funktionswert $\emptyset$. Sicher ist f_φ eine Skolemfunktion für φ.

Ist F eine beliebige n-stellige Funktion (d.h. $\mathrm{Db}(F) \subseteq \mathrm{V}^n$) und A eine beliebige Menge, so setzen wir

$$F''A := F[\,A^n \cap \mathrm{Db}(F)\,].$$

Bemerkung. Diese Definition ist nicht ganz eindeutig, da sicherlich jede Funktion auch 1-stellig ist. Gibt es jedoch $n, m \in \omega \setminus 1$ mit $m \neq n$, so daß F m-stellig *und* n-stellig ist, so ist $m = 1$ oder $n = 1$ (wenn $F \neq \emptyset$ ist). In diesem Fall soll sich die obige Definition natürlich auf den (eindeutig bestimmten) größeren der beiden Werte beziehen.

Wir erhalten nun eine sehr einfache Möglichkeit, die Skolem-Hülle zu bestimmen:

Lemma 5.16. *Ist $X \subseteq \mathrm{H}(\Theta)$, so ist*

$$\mathrm{Sk}_\Theta(X) = \bigcup\{f''_\varphi X : \varphi \text{ } L\text{-Formel}\}.$$

Beweis. Sei $X_0 := X$ und $X_{n+1} := \bigcup\{f''_\varphi X_n : \varphi$ L-Formel$\}$ für $n < \omega$ sowie $X^+ := \bigcup\{X_n : n < \omega\}$. Bekanntlich ist dann $(X_n : n < \omega)$ eine aufsteigende Kette von Mengen und X^+ elementare Unterstruktur von $\mathrm{H}(\Theta)$. (Dies ist gerade der übliche Beweis des Satzes von Skolem-Löwenheim.) Nach Konstruktion der Skolemfunktionen f_φ gilt offenbar sogar $X^+ = \mathrm{Sk}_\Theta(X)$. Es reicht also zu zeigen, daß $X_2 = X_1$ ist, denn dann folgt $X_n = X_1$ für alle $n \geq 2$ und damit $X^+ = X_1$, also die Behauptung des Lemmas.

Seien $a_1, \dots, a_n$ aus X_1, und sei $a = f_\varphi(a_1, \dots, a_n)$ für eine L-Formel φ. Für $i = 1, \dots, n$ gibt es dann $a_1^i, \dots, a_{n_i}^i \in X_0$ und eine L-Formel φ_i mit $a_i = f_{\varphi_i}(a_1^i, \dots, a_{n_i}^i)$. Sei nun $s_0 := 0$, $s_i := \sum_{k=1}^i n_k$ für $i = 1, \dots, n$ und ψ die Formel

$$\exists x_{s_n+1} \dots \exists x_{s_n+n}\ \varphi^*(x_0, x_{s_n+1}, \dots, x_{s_n+n}) \wedge \bigwedge_{i=1}^n \varphi_i^*(x_{s_n+i}, x_{s_{i-1}+1}, \dots, x_{s_i}).$$

Dann ist $a = f_\psi(a_1^1, \dots, a_{n_1}^1, a_1^2, \dots, a_{n_2}^2, \dots, a_1^n, \dots, a_{n_n}^n) \in X_1$. ■

Lemma 5.17. *Sei N elementare Unterstruktur von* $\mathrm{H}(\Theta)$, *und seien* $\gamma, A \in N$ *mit* $|A| < \mathrm{cf}(\gamma)$. *Ist N' die Skolemhülle von $N \cup A$, so ist*

$$\chi_{N'}(\gamma) = \chi_N(\gamma).$$

Beweis. O.B.d.A. sei γ Limeszahl (denn sonst ist $A = \emptyset$, also $N = N'$). Sicher gilt „$\geq$“. Wir zeigen die andere Ungleichung:
Sei $\beta \in N' \cap \gamma$. Nach dem obigen Lemma gibt es $a_1, \dots, a_n \in N \cup A$ und eine L-Formel $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ mit $\beta = f_\varphi(a_1, \dots, a_n)$. Sei $\{b_1, \dots, b_m\} := \{a_1, \dots, a_n\} \cap N$, d.h. $\beta \in A^+ := f_\varphi''(A \cup \{b_1, \dots, b_m\})$. ψ sei die Formel (mit Konstanten aus N)

$$\exists x_1 \dots \exists x_n\ \varphi^*(x_0, \dots, x_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^n (x_i \in A \vee \bigvee_{j=1}^m x_i = b_j).$$

Dann ist $a \in A^+$ genau dann, wenn $\mathrm{H}(\Theta) \models \psi(a)$ gilt, d.h. diese Eigenschaft ist mit Parametern aus N definierbar.
Wegen $|A| < \mathrm{cf}(\gamma)$ ist nun $A^+ \cap \gamma$ eine beschränkte Teilmenge von γ. Also gibt es ein $<^*$-minimales $\zeta \in \gamma$ mit $A^+ \cap \gamma \subseteq \zeta$. Nach dem letzten Absatz ist $\zeta \in N$, also $\beta < \zeta \leq \chi_N(\gamma)$. ■

Hieraus können wir nun folgern, daß wir elementare Unterstrukturen von $\mathrm{H}(\Theta)$ vergrößern können, ohne daß sich die charakteristische Funktion (bei entsprechend großen Werten) ändert:

Korollar 5.18. *Sei N elementare Unterstruktur von* $\mathrm{H}(\Theta)$, $\gamma \in N$ *regulär und* $\alpha < \chi_N(\gamma)$. *Ist N' die Skolemhülle von $N \cup \{\alpha\}$, so ist*

$$\chi_{N'}(\gamma) = \chi_N(\gamma).$$

Beweis. Man wähle ein $\zeta \in N \cap \gamma$ mit $\alpha < \zeta$. Benutzt man das obige Lemma mit $A = \zeta$, so erhält man $\chi_{\mathrm{Sk}_\Theta(N \cup \zeta)}(\gamma) = \chi_N(\gamma)$. Da N' eine Unterstruktur von $\mathrm{Sk}_\Theta(N \cup \zeta)$ ist, folgt so die Behauptung. ■

5.5 Eine Alternative zu $\mathrm{H}(\Theta)$

Wir wollen in diesem Abschnitt noch kurz auf die kombinatorischen Grundlagen der in diesem Kapitel entwickelten Methode eingehen. Dabei werden wir zeigen, daß die Arbeit mit elementaren Unterstrukturen von $\mathrm{H}(\Theta)$ zwar sehr praktisch und elegant ist, daß es aber eigentlich nicht nötig ist, sich mit modelltheoretischen Begriffen wie „Absolutheit“, „elementare Unterstruktur“ oder „Δ_0-Formel“ zu beschäftigen, um die Beweise in den folgenden Kapiteln führen zu können.
Man kann an den Beispielen im zweiten Abschnitt sehen, daß es im wesentlichen darum geht, daß die Mengen, die wir betrachten, abgeschlossen gegen bestimmte Operationen sind. Dies werden wir nun exakt definieren. (Man erinnere sich dabei an die Definition von $F''A$ auf Seite 47 und die Bemerkung danach.)
Ist f eine Funktion und A eine Menge, so ist A **abgeschlossen bzgl.** f, falls $f''A \subseteq A$ ist. Ist F eine Menge von Funktionen, so ist A **abgeschlossen bzgl.** F, falls A abgeschlossen bzgl. aller $f \in F$ ist.
Damit können wir sofort Beispiel A umformulieren: Sei N eine Menge, die abgeschlossen bzgl. der Funktion

$$F_1 := \{(x, |x|) : x \in \mathrm{V}\}$$

ist. Ist $a \in N$, so ist auch $|a| \in N$. Analog können wir bei Beispiel C vorgehen. Auf das Beispiel B wollen wir nun eingehen:
Für jede Kardinalzahl λ sei F_2^λ eine Funktion, die jedem geordneten Paar (x, y) mit $x, y \in \mathrm{V}_\lambda$ und $|x| = |y|$ eine Bijektion von x auf y zuordnet. (Solch eine Funktion findet man sicher mit dem Auswahlaxiom.) Wir definieren außerdem

$$F_3 := \{((x, y), x(y)) : x \text{ Funktion} \wedge y \in \mathrm{Db}(x)\},$$
$$F_4 := \{((x, y), x^{-1}(y)) : x \text{ injektive Funktion} \wedge y \in \mathrm{Wb}(x)\} \text{ und}$$
$$F_5 := \{(\kappa, \kappa^+) : \kappa \in \mathrm{CN}\}.$$

Dann gilt die folgende Analogie zu Lemma 5.11:

Lemma 5.19. *Sei A ein Intervall von regulären Kardinalzahlen, und seien M und N Mengen, mit:*

(i) *M und N sind abgeschlossen bzgl. F_1, $F_2^{\sup A}$, F_3, F_4, F_5 und F_5^{-1}.*

(ii) $M \cap \min A \subseteq N$

(iii) $M \cap A \subseteq N$

(iv) *Es gibt eine Folge von Teilmengen von N, die M über A charakterisiert.*

Dann ist $M \cap \sup A \subseteq N$.

Beweis. Wir gehen genau wie im ursprünglichen Beweis vor. Im Induktionsschritt gilt $M \cap \lambda \subseteq N$ und wir müssen $M \cap \lambda^+ \subseteq N$ zeigen.
Ist $\alpha \in M \cap \lambda^+$ und o.B.d.A. $\alpha \geq \lambda$, so ist nach (i) $\lambda = |\alpha| \in M$ und $\lambda^+ \in M$, nach (iii) also $\lambda^+ \in N$ und wiederum nach (i) $\lambda \in N$. Nach (iv) finden wir ein $\beta \in M \cap N \cap \lambda^+$ mit $\alpha < \beta$. $h := F_2^{\sup A}(\lambda, \beta)$ ist dann eine Bijektion von λ auf β, die nach (i) in M und N liegt. Da M abgeschlossen bzgl. F_3 ist, gilt

$$h[M \cap \lambda] = F_3[\{h\} \times (M \cap \lambda)] \subseteq M.$$

Ist umgekehrt $\gamma \in M \cap \beta$, so ist $h^{-1}(\gamma) = F_4(h, \gamma) \in M$. Also ist $h[M \cap \lambda] = M \cap \beta$ und analog $h[N \cap \lambda] = N \cap \beta$. Wie im alten Beweis folgt nun nach Induktionsvoraussetzung $\alpha \in N$. ■

Die zu Lemma 5.12 analoge Aussage folgt damit sofort.

Bemerkung. Hier wurde gleichzeitig gezeigt, wie man mittels der Funktion F_2^λ Beispiel B entsprechend umformulieren kann. Man beachte, daß die Vorgabe von λ eine Einschränkung ist, die der Vorgabe von Θ in den vorhergehenden Abschnitten entspricht. Auch hier ist es kein Problem, λ immer groß genug für die entsprechende Beweissituation zu wählen.

Ist F eine Menge von Funktionen, so nennen wir $(N_i : i < \gamma)$ eine **F-Approximationsfolge**, falls gilt:

- Ist $i + 1 < \gamma$, so ist $N_i \subseteq N_{i+1}$.
- Ist $i < \gamma$ eine Limeszahl, so ist $N_i = \bigcup\{N_j : j < i\}$.
- Ist $i + 1 < \gamma$, so ist $(N_j : j \leq i) \in N_{i+1}$.
- Ist $i < \gamma$, so ist N_i abgeschlossen bzgl. F.

Wir ersetzen den Satz von Löwenheim-Skolem durch die folgende Aussage:

Lemma 5.20. *Ist λ eine unendliche Kardinalzahl, A eine Menge mit $|A| \leq \lambda$ und F eine abzählbare Menge von Funktionen, so gibt es eine Obermenge A' von A mit $|A'| \leq \lambda$, die abgeschlossen bzgl. F ist.*

Beweis. Wie im Beweis des Satzes von Löwenheim-Skolem definieren wir rekursiv $A_0 := A$ und

$$A_{n+1} := A_n \cup \bigcup \{f''A_n : f \in F\}$$

für $n < \omega$. $A' := \bigcup\{A_n : n < \omega\}$ leistet dann das gewünschte. ■

Damit ist es sicher kein Problem, die folgende Analogie zu Lemma 5.13 zu beweisen:

Lemma 5.21. *Sei μ eine unendliche Kardinalzahl, $\sigma \leq \mu^+$, F eine abzählbare Menge von Funktionen und X eine Menge mit $|X| \leq \mu$. Dann gibt es eine F-Approximationsfolge $(N_i : i < \sigma)$ mit $X \subseteq N_0$ und $|N_i| \leq \mu$ für alle $i < \sigma$.*

Bemerkung. Hierbei geht auch ein, daß $\bigcup \mathfrak{A}$ abgeschlossen bzgl. F ist, falls $\mathfrak{A}$ eine Kette von Mengen ist, die abgeschlossen bzgl. F sind.

Analysiert man den Beweis von Lemma 5.14, so sieht man, daß diese Aussage auch für F-Approximationsfolgen gilt, falls F die folgenden Funktionen enthält:

(i) $\{(x, \mathrm{Db}(x)) : x \text{ Funktion}\}$

(ii) $\{(x, \bigcup x) : x \in \mathrm{V}\}$

(iii) F_3 *(siehe Seite 49)*

(iv) $\{((x, y), x \cap y) : x, y \in \mathrm{V}\}$

(v) $\{(\alpha, \alpha + 1) : \alpha \in \mathrm{ON}\}$

Ist nämlich $(N_i : i \leq \lambda)$ eine F-Approximationsfolge für eine Limeszahl λ, so ist $(N_j : j \leq i) \in N_{i+1}$ für alle $i < \lambda$. Mit (i), (ii) und (iii) folgt dann sukzessive $i + 1 \in N_{i+1}$, $i \in N_{i+1}$ und $N_i \in N_{i+1}$. (iv) und (ii) liefern $\chi_{N_i}(\kappa) \in N_{i+1}$ für $\kappa \in N_{i+1}$. Und wegen (v) muß $\chi_{N_i}(\kappa) < \chi_{N_{i+1}}(\kappa)$ gelten, falls $\chi_{N_i}(\kappa) < \kappa$ ist.

Zum Schluß gehen wir noch auf die Skolem-Hülle aus dem dritten Abschnitt ein. Ist A eine Menge und F eine Menge von Funktionen, so setzen wir

$$\mathrm{Sk}_F(A) := \bigcap\{A' : A \subseteq A' \wedge A' \text{ abgeschlossen bzgl. } F\}.$$

Nach Lemma 5.20 ist diese Menge wohldefiniert und sicher eine Obermenge von A, die abgeschlossen bzgl. F ist.
Ist nun F abgeschlossen gegen die Komposition von Funktionen und ist die Identität auf V ein Element von F, so ist offenbar

$$\mathrm{Sk}_F(A) = \bigcup\{f''A : f \in F\}.$$

Damit haben eine Analogie zu Lemma 5.16 gefunden.
Außerdem ordnen wir jeder Funktion f eine Abbildung f^+ zu durch:

$$f^+ := \{(x, f''x) : x \in \mathrm{V}\}.$$

Wir nennen F **stark abgeschlossen**, wenn F abgeschlossen gegen Kompositionen ist, die Funktionen

(i) id_{V},

(ii) $\{(x, \bigcup x) : x \in \mathrm{V}\}$,

(iii) $\{((x,y), x \cap y) : x, y \in \mathrm{V}\}$,

(iv) $\{((x_1, \ldots, x_n), \{x_1, \ldots, x_n\}) : x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{V}\}$ für alle $n \in \omega$

enthält und wenn für alle $f \in F$ auch f^+ ein Element von F ist. Sicher ist es wie in Lemma 5.20 kein Problem, zu jeder abzählbaren Funktionenmenge F eine abzählbare Obermenge F' zu finden, die stark abgeschlossen ist. (Siehe auch [HSW, 3.7].)

Lemma 5.22. *Ist F eine Menge von Funktionen, die stark abgeschlossen ist und N eine Menge, die abgeschlossen bzgl. F ist, so gilt: Sind $\gamma, A \in N$ mit $|A| < \mathrm{cf}(\gamma)$, so ist*

$$\chi_{\mathrm{Sk}_F(N \cup A)}(\gamma) = \chi_N(\gamma).$$

Beweis. Dies wird genau wie Lemma 5.17 bewiesen: Ist $\beta \in \gamma \cap \mathrm{Sk}_F(N \cup A)$, so gibt es $b_1, \ldots, b_m \in N$ und ein $f \in F$ mit $\beta \in A^+ := f''(A \cup \{b_1, \ldots, b_m\})$. Da F stark abgeschlossen ist, ist mit (iv) $\{b_1, \ldots, b_m\} \in N$, mit (iv) und (ii) $A \cup \{b_1, \ldots, b_m\} \in N$ und somit $A^+ \in N$ (denn N ist abgeschlossen bzgl. f^+). Mit (ii) und (iii) folgt, daß $\zeta := \sup(A^+ \cap \gamma)$ ein Element von N ist. Nach Voraussetzung ist $\zeta < \gamma$. ■

Wir könnten nun in den folgenden Kapiteln elementare Unterstrukturen von $\mathrm{H}(\Theta)$ immer ersetzen durch Mengen, die abgeschlossen sind bzgl. bestimmter Funktionen, und könnten dieselben Resultate beweisen. (Die Wahl der Funktionen hängt dabei vom jeweiligen Beweis ab, man kommt jedoch immer mit abzählbar vielen aus.) Dieser Abschnitt sollte jedoch auch klar gemacht haben, wie elegant Shelahs $\mathrm{H}(\Theta)$-Methode im Vergleich zu diesem Ansatz ist. Wir werden daher auch weiterhin mit „modelltheoretischen“ Methoden arbeiten.

Bemerkung. In diesem Abschnitt haben wir ein bißchen gemogelt, da häufiger von *Mengen* von Funktionen die Rede war, obwohl die Funktionen teilweise *echte Klassen* waren. Dies läßt sich jedoch leicht umgehen, wenn man die Funktionen auf eine genügend große Menge einschränkt, etwa auf V_λ für eine genügend große Kardinalzahl λ.

6 „Kontrollierte“ Approximationsfolgen

6.1 Spezielle Folgen und Kontrollfunktionen

In diesem Kapitel sei a stets eine progressive Menge von regulären Kardinalzahlen. Außerdem definieren wir

$$\lambda_b := \max\ \mathrm{pcf}(b)$$

für jede progressive Menge b von regulären Kardinalzahlen.
Ist σ regulär, so nennen wir eine Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ von Elementen von $\prod a$ **σ-stetig**, wenn

$$f_\alpha = \min\{\sup\{f_\beta : \beta \in C\} : C \text{ Club in } \alpha\}$$

für alle $\alpha < \lambda$ mit $\mathrm{cf}(\alpha) = \sigma$ gilt.
Ist $\sigma \in (|a|, \min a)_{\mathrm{reg}}$ überabzählbar und für $b \subseteq a$ jeweils $\bar{f}^b = (f^b_\alpha : \alpha < \lambda_b)$ eine Folge von Elementen von $\prod a$ mit

- $\bar{f}^b$ steigt modulo $\mathcal{J}_{<\lambda_b}(a)$ streng monoton,
- $\bar{f}^b$ ist σ-stetig, und
- $\{f^b_\alpha \restriction b : \alpha < \lambda_b\}$ ist (punktweise) kofinal in $\prod b$,

so nennen wir $\bar{f} := (\bar{f}^b : b \subseteq a)$ eine **spezielle Folge für a und σ**.

Lemma 6.1. *Es gibt eine Folge $\bar{f} = (\bar{f}^b : b \subseteq a)$, die für alle überabzählbaren $\sigma \in (|a|, \min a)_{\mathrm{reg}}$ spezielle Folge für a und σ ist. Ferner gibt es für alle $\alpha < \lambda$ mit $\mathrm{cf}(\alpha) \in (|a|, \min a)_{\mathrm{reg}}$ und $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$ einen Club C^α in α vom Ordnungstyp $\mathrm{cf}(\alpha)$ mit*

$$f^b_\alpha = \sup\{f^b_\beta : \beta \in C^\alpha\}. \tag{3}$$

Beweis. [Sh5, II 3.4A] Sei $b \subseteq a$. Nach Satz 4.22 finden wir eine Teilmenge G von $\prod b$ mit $|G| = \lambda_b$, die kofinal in $\prod b$ liegt. $(g_\alpha : \alpha < \lambda_b)$ sei eine Aufzählung von G. Wir definieren $\bar{f}^b := (f^b_\alpha : \alpha < \lambda_b)$ rekursiv:
$f^b_0 \in \prod a$ sei beliebig gewählt. Für alle $\alpha < \lambda_b$ setzen wir

$$f^b_{\alpha+1}(\delta) := \begin{cases} \max\{f^b_\alpha(\delta) + 1, g_\alpha(\delta)\} & \delta \in b \\ f^b_\alpha(\delta) + 1 & \delta \notin b \end{cases}$$

für $\delta \in a$.
Sei nun $\alpha < \lambda_b$ eine Limeszahl und $(f^b_\beta : \beta < \alpha)$ bereits definiert. Ist $\mathrm{cf}(\alpha) \in (|a|, \min a)_{\mathrm{reg}}$ und $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$, so setzen wir

$$f^b_\alpha := \min\{\sup\{f^b_\beta : \beta \in C\} : C \text{ Club in } \alpha\}.$$

Wählen wir für alle $\delta \in a$ einen Club C_δ mit $f^b_\alpha(\delta) = \sup\{f^b_\beta(\delta) : \beta \in C_\delta\}$, so ist $C^\alpha := \bigcap\{C_\delta : \delta \in a\}$ wegen $|a| < \mathrm{cf}(\alpha)$ ein Club in α, der offenbar (3) erfüllt. (Ist der Ordnungstyp von C nicht $\mathrm{cf}(\alpha)$, so dünnen wir entsprechend aus.) Wegen $\mathrm{cf}(\alpha) < \min a$ folgt damit insbesondere, daß f^b_α ein Element von $\prod a$ ist.
Ist α eine Limeszahl mit $\mathrm{cf}(\alpha) \notin (|a|, \min a)_{\mathrm{reg}}$ oder $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$, so wählen wir ein $f^b_\alpha \in \prod a$ mit $f^b_\beta <_{\mathcal{J}_{<\lambda_b}(a)} f^b_\alpha$ für alle $\beta < \alpha$. Dies ist möglich, da $\mathcal{J}_{<\lambda_b}(a)$ λ_b-gerichtet ist.
Damit ist die rekursive Definition abgeschlossen. Nach Konstruktion ist $\bar{f}^b$ offenbar σ-stetig für alle $\sigma \in (|a|, \min a)_{\mathrm{reg}}$. Ist $h \in \prod b$ beliebig, so gibt es ein $\alpha < \lambda_b$ mit $h \leq g_\alpha$ und damit $h \leq f^b_{\alpha+1} \restriction b$. Es bleibt noch zu zeigen, daß $\bar{f}^b$ modulo $\mathcal{J}_{<\lambda_b}(a)$ streng monoton steigt:
Ist $\alpha < \lambda_b$ mit $\mathrm{cf}(\alpha) \in (|a|, \min a)_{\mathrm{reg}}$ und $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$ sowie $\beta < \alpha$, so gibt es ein $\beta' \in C^\alpha$ mit $\beta \leq \beta'$, und es ist $f^b_{\beta'} \leq f^b_\alpha$. Induktiv folgt nach Konstruktion nun die Behauptung. ■

Ist N eine elementare Unterstruktur von $\mathrm{H}(\Theta)$ und α eine Limeszahl mit $\mathrm{cf}(\alpha) > |N|$, so ist immer $\chi_N(\alpha) \notin N$, denn mit $\beta \in N \cap \alpha$ ist auch $\beta + 1 \in N \cap \alpha$. N „kennt" also die Werte von χ_N an vielen Stellen nicht.
Spezielle Folgen bieten jedoch die Möglichkeit, elementare Unterstrukturen von $\mathrm{H}(\Theta)$ zu konstruieren, die zumindest ein rudimentäres „Wissen" über ihre charakteristische Funktion haben. Dies besagt das folgende Lemma:

Lemma 6.2. *Sei $\Theta > 2^{2^{\sup a}}$ regulär, $\sigma \in (|a|, \min a)_{\mathrm{reg}}$, $\sigma > \omega$ und $(N_i : i \leq \sigma)$ eine Approximationsfolge in $\mathrm{H}(\Theta)$. Ist $\bar{f} := (\bar{f}^b : b \subseteq a)$ eine spezielle Folge für a und σ, $|N_i| < \min a$ für alle $i < \sigma$ und $a \cup \{a, \bar{f}\} \subseteq N_0$, so gilt für alle $b \in N_\sigma \cap \mathcal{P}(a)$:*

(i) $f^b_{\chi_{N_\sigma}(\lambda_b)} \leq \chi_{N_\sigma} \restriction a$

(ii) *Es gibt eine Menge c mit*

$$f^b_{\chi_{N_\sigma}(\lambda_b)} =_{(b\setminus c)} \chi_{N_\sigma}.$$

Dabei ist $c = \mathrm{B}[f^b_\beta, f^b_\alpha] \cap b$ *für gewisse* $\alpha, \beta \in N_\sigma \cap \lambda_b$ *mit* $\alpha < \beta$. *Insbesondere gilt also*

$$c \in N_\sigma \cap \mathcal{J}_{<\lambda_b}(b).$$

Beweis. [Sh5, II 3.4] Für $i \leq \sigma$ setzen wir $\gamma_i := \chi_{N_i}(\lambda_b)$. O.B.d.A. sei b (und damit λ_b) ein Element von N_0. (Sonst betrachten wir ein entsprechendes Endstück der Folge.) Ferner ist $|N_i| < \min a \leq \lambda_b = \mathrm{cf}(\lambda_b)$ für $i < \sigma$. Nach Lemma 5.14 ist $(\gamma_i : i < \sigma)$ eine in γ_σ kofinale Normalfunktion und $\gamma_i \in N_{i+1}$ für alle $i < \sigma$. Somit ist $f^b_{\gamma_i} \in N_\sigma$ für alle $i < \sigma$. Nach Lemma 6.1 können wir

$$f^b_{\gamma_\sigma} = \sup\{f^b_{\gamma_i} : i \in C\} \tag{4}$$

für einen Club C in σ annehmen. Damit ist (i) offenbar bewiesen.
Sei $i < \sigma$. Nach Voraussetzung über $\bar{f}^b$ finden wir ein $\beta_i < \lambda_b$ mit $\chi_{N_i} <_b f^b_{\beta_i}$. Sicher können wir auch $\beta_i \in N_{i+1}$, also $\beta_i < \gamma_{i+1}$ erreichen. Ist nun $i < j < \sigma$, so ist $\beta_i \in N_{i+1} \subseteq N_j$, also $f^b_{\beta_i} \in N_j$ und damit

$$f^b_{\beta_i} <_b \chi_{N_j} <_b f^b_{\beta_j}, \tag{5}$$

die Folge $(f^b_{\beta_i} \restriction b : i < \sigma)$ steigt somit punktweise streng monoton.
Setzt man

$$c_i := \{\delta \in b : f^b_{\beta_i}(\delta) \geq f^b_{\gamma_\sigma}(\delta)\},$$

für $i < \sigma$, so ist die Folge der c_i also eine monoton steigende Folge von Teilmengen von a. Wegen $\sigma > |a|$ muß es ein i_0 mit $c_{i_0} = c_i$ für alle $i \in [i_0, \sigma)_{\mathrm{ON}}$ geben. Sei $\delta \in b \setminus c_{i_0}$. Mit (5) folgt $\chi_{N_i}(\delta) < f^b_{\gamma_\sigma}(\delta)$ für $i \in [i_0, \sigma)_{\mathrm{ON}}$, also $\chi_{N_\sigma}(\delta) \leq f^b_{\gamma_\sigma}(\delta)$. Schließlich sei $j_0 \in C$ mit $j_0 > i_0$, also

$$c := \{\delta \in b : f^b_{\beta_{i_0}}(\delta) \geq f^b_{\gamma_{j_0}}(\delta)\} \in \mathcal{J}_{<\lambda_b}(b)$$

nach Voraussetzung über $\bar{f}^b$. Offenbar ist $c_{i_0} \subseteq c$ (nach Gleichung (4)) und $c \in N_\sigma$. ■

Ist $\bar{f}$ eine spezielle Folge für a und alle überabzählbaren $\sigma \in (|a|, \min a)_{\text{reg}}$ (wie in Lemma 6.1), so definieren wir rekursiv über λ_b die Mengen

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_b :=& \{f^b_\gamma \restriction (b \setminus c) \cup g \restriction c : \gamma < \lambda_b \wedge g \in \mathfrak{F}_c \wedge \\ & \exists \alpha, \beta < \lambda_b \, (\alpha < \beta \wedge c = \{\delta \in b : f^b_\alpha(\delta) \geq f^b_\beta(\delta)\})\}\end{aligned} \tag{6}$$

für $b \subseteq a$. Da $\bar{f}^b$ modulo $\mathcal{J}_{<\lambda_b}(a)$ streng monoton ist, gilt $c \in \mathcal{J}_{<\lambda_b}(a)$ für das c aus Gleichung (6), d.h. $\lambda_c < \lambda_b$. $\mathfrak{F}_c$ ist also bereits definiert.
Eine derart gebildete Funktion

$$\mathfrak{F} := \begin{cases} \mathcal{P}(a) & \to \bigcup\{\mathcal{P}(\prod b) : b \subseteq a\} \\ b & \mapsto \mathfrak{F}_b \end{cases}$$

nennen wir eine (*von $\bar{f}$ erzeugte*) **Kontrollfunktion** für a, $\mathfrak{F}_b$ heißt **Kontrollmenge** für b.

Lemma 6.3. *Ist $\mathfrak{F}$ eine Kontrollfunktion für a und $b \subseteq a$, so ist*

$$|\mathfrak{F}_b| \leq \max \ \mathrm{pcf}(b).$$

Beweis. Man beweist dies leicht durch Induktion über λ_b anhand der rekursiven Definition in Gleichung (6): Es gibt λ_b viele Möglichkeiten, γ, α und β zu wählen, und dazu nach Induktionsvoraussetzung jeweils $|\mathfrak{F}_c| \leq \lambda_c < \lambda_b$ viele, g zu wählen. ■

Der folgende Satz erlaubt uns die Konstruktion von elementaren Unterstrukturen von $\mathrm{H}(\Theta)$, deren charakteristische Funktionen wir bereits im voraus kennen, da sie in einer vorgegebenen Kontrollmenge liegen. Da wir die Mächtigkeit von Kontrollmengen mit dem obigen Lemma abschätzen können, erhalten wir so eine sehr starke Aussage.

Satz 6.4. *Sei a eine unendliche progressive Menge regulärer Kardinalzahlen, $b \subseteq a$ und $\mathfrak{F}$ eine Kontrollfunktion für a. Ist $\Theta > 2^{2^{\sup a}}$ regulär, $\sigma \in (|a|, \min a)_{\text{reg}}$, $\sigma > \omega$ und $(N_i : i \leq \sigma)$ eine Approximationsfolge in $\mathrm{H}(\Theta)$ mit $\{\mathfrak{F}, a, b\} \cup a \subseteq N_0$ sowie $|N_i| < \min a$ für alle $i < \sigma$, so ist*

$$\chi_{N_\sigma} \restriction b \in \mathfrak{F}_b.$$

Beweis. [Sh5, II 3.4] Wir beweisen die Behauptung durch transfinite Induktion über λ_b.
Wir wählen zunächst eine spezielle Folge $\bar{f} \in N_0$, die $\mathfrak{F}$ erzeugt. Sei c wie in (ii) von Lemma 6.2 gewählt.
O.B.d.A. können wir $c \in N_0$ annehmen (sonst betrachte ein entsprechendes Endstück der Approximationsfolge) und daher die Induktionsvoraussetzung auf c anwenden: Es folgt $\chi_{N_\sigma} \upharpoonright c \in \mathfrak{F}_c$ und damit

$$\chi_{N_\sigma} \upharpoonright b = f^b_{\chi_{N_\sigma}(\lambda_b)} \upharpoonright (b \setminus c) \cup \chi_{N_\sigma} \upharpoonright c \in \mathfrak{F}_b. \qquad \blacksquare$$

6.2 Ein strukturelles Ergebnis über pcf(a)

Zunächst werden wir spezielle Folgen anwenden, um eine Aussage über die Struktur von pcf(a) zu machen. Das Ergebnis findet sich implizit im Beweis von [Sh5, VIII 3.4].

Satz 6.5. *Es gibt keine Folge* $(\chi_i : i < |a|^+)$ *von Elementen von* pcf(a) *mit*

$$\max \operatorname{pcf}(\{\chi_j : j < i\}) < \chi_i$$

für alle $i < |a|^+$.

Bemerkung. Man beachte, daß im obigen Satz das Maximum von

$$\operatorname{pcf}(\{\chi_j : j < i\})$$

jeweils existiert, da $\{\chi_j : j < i\}$ progressiv ist.

Beweis. [Sh5, VIII 3.4] Angenommen, so eine Folge existiert. Dann ist a sicher unendlich. O.B.d.A. sei $|a|^{+3} < \min a$. Wir setzen $a^* := a \cup \{\chi_i : i < |a|^+\}$ und $\sigma := |a^*|^+$. Dann ist a^* sicher progressiv. $\bar{f}$ sei eine spezielle Folge für a^*. Ferner sei

$$\bar{b} := (b_\mu : \mu \in \operatorname{pcf}(a))$$

eine Generatorenfolge für a.
Sei Θ regulär und genügend groß und $(N_i : i \leq \sigma)$ eine Approximationsfolge in H(Θ) mit $|N_i| < \min a$ für alle $i < \sigma$ sowie

$$a^* \cup |a|^+ \cup \{a, (\chi_i : i < |a|^+), \bar{b}, \bar{f}\} \subseteq N_0.$$

Ist $i < |a|^+$, so existiert eine Folge $(c^i_k : k \leq n_i)$ in N_σ mit $\emptyset = c^i_{n_i} \subseteq c^i_{n_i-1} \subseteq \cdots \subseteq c^i_0 = \{\chi_j : j < i\}$ sowie

$$f^{c^i_k}_{\chi_{N_\sigma}(\lambda_{c^i_k})} \leq_{c^i_k} \chi_{N_\sigma}$$

für $k \leq n_i$ und

$$f^{c^i_k}_{\chi_{N_\sigma}(\lambda_{c^i_k})} =_{(c^i_k \setminus c^i_{k+1})} \chi_{N_\sigma}$$

für $k < n_i$. (Zum Beweis der Existenz dieser Folge wendet man mehrfach Lemma 6.2 an. Wegen $c^i_{k+1} \in \mathcal{J}_{<\lambda_{c^i_k}}(c^i_k)$ ist $\lambda_{c^i_{k+1}} < \lambda_{c^i_k}$, darum muß man nach endlich vielen Schritten fertig sein.)
Sei $f_{\delta,\alpha} := f^{b_\delta}_\alpha \restriction a$ für $\delta \in \mathrm{pcf}(a)$ und $\alpha < \lambda_{b_\delta}$. Man setze

$$g_i := \sup\{f_{\chi_j, \chi_{N_\sigma}(\chi_j)} : j < i\} \tag{7}$$

für $i < |a|^+$. Wegen $|i| \leq |a| < \min a$ ist $g_i \in \prod a$. Nach Lemma 6.2 ist $g_i \leq \chi_{N_\sigma}$. (Offenbar macht man durch Einschränken auf a aus $\bar{f}$ eine spezielle Folge für a und σ.) Sicher ist $g_j \leq g_i$, also $B_j \subseteq B_i$ für $j < i < |a|^+$, wenn wir

$$B_i := \{\delta \in a : g_i(\delta) = \chi_{N_\sigma}(\delta)\}$$

setzen. Damit existiert ein i_0 mit $B_i = B_{i_0}$ für alle $i \in [i_0, |a|^+)$. Ist $j < i < |a|^+$, so ist nach Lemma 6.2

$$\{\delta \in b_{\chi_j} : f_{\chi_j, \chi_{N_\sigma}(\chi_j)}(\delta) < \chi_{N_\sigma}(\delta)\} \in \mathcal{J}_{<\chi_j}(a) \tag{8}$$

und damit

$$\{\delta \in b_{\chi_j} : g_i(\delta) < \chi_{N_\sigma}(\delta)\} \in \mathcal{J}_{<\chi_j}(a). \tag{9}$$

Setzt man $\lambda_{i,k} := \lambda_{c^i_k}$ für $i < |a|^+$ und $k \leq n_i$, so ist

$$\begin{aligned}(\chi_{N_\sigma}(\chi_j) : j < i_0) &= \chi_{N_\sigma} \restriction \{\chi_j : j < i_0\} = \chi_{N_\sigma} \restriction c^{i_0}_0 \\ &= f^{c^{i_0}_0}_{\chi_{N_\sigma}(\lambda_{i_0,0})} \restriction (c^{i_0}_0 \setminus c^{i_0}_1) \cup \cdots \cup f^{c^{i_0}_{n_{i_0}-1}}_{\chi_{N_\sigma}(\lambda_{i_0,n_{i_0}-1})} \restriction (c^{i_0}_{n_{i_0}-1}).\end{aligned}$$

Nun ist $\bar{f} \in N_\sigma$, $i_0 \in |a|^+ \subseteq N_\sigma$, $(c^{i_0}_k : k \leq n_{i_0}) \in N_\sigma$ und $(\chi_i : i < |a|^+) \in N_\sigma$. Also ist $(\chi_{N_\sigma}(\chi_j) : j < i_0)$ und damit nach (7) auch g_{i_0} ein Element von

$$N^* := \mathrm{Sk}_\Theta(N_\sigma \cup \{\chi_{N_\sigma}(\lambda_{i_0,k}) : k < n_{i_0}\}).$$

Es ist $\lambda_{i_0,k} = \max\ \mathrm{pcf}(c_k^{i_0}) \leq \max\ \mathrm{pcf}(c_0^{i_0}) < \chi_{i_0}$ nach Annahme über die χ_i. Wegen $\chi_{i_0} \in N_\sigma$ ist $\chi_{N_\sigma}(\chi_{i_0}) = \chi_{N^*}(\chi_{i_0})$ nach Lemma 5.17.
Es ist

$$\gamma := \min\{\alpha < \chi_{i_0} : g_{i_0} \leq_{(\mathcal{J}_{<\chi_{i_0}}(a) \restriction b_{\chi_{i_0}})} f_{\chi_{i_0},\alpha}\}$$

ein Element von N^* (weil alle Parameter in der Definition Elemente von N^* sind), also $\gamma < \chi_{N_\sigma}(\chi_{i_0})$. ($\gamma$ existiert nach Wahl von $\bar{f}$.) Es folgt

$$d_1 := \{\delta \in b_{\chi_{i_0}} : f_{\chi_{i_0},\gamma}(\delta) \geq f_{\chi_{i_0},\chi_{N_\sigma}(\chi_{i_0})}(\delta)\} \in \mathcal{J}_{<\chi_{i_0}}(a).$$

Nach (8) und (9) mit i_0, i_0+1 statt j, i ist

$$d_2 := \{\delta \in b_{\chi_{i_0}} : \neg(f_{\chi_{i_0},\chi_{N_\sigma}(\chi_{i_0})}(\delta) = \chi_{N_\sigma}(\delta) = g_{i_0+1}(\delta))\} \in \mathcal{J}_{<\chi_{i_0}}(a).$$

Ist nun δ Element der $\mathcal{J}_{<\chi_{i_0}}(a)$-positiven Menge $b_{\chi_{i_0}} \setminus (d_1 \cup d_2)$, so ist

$$f_{\chi_{i_0},\gamma}(\delta) < f_{\chi_{i_0},\chi_{N_\sigma}(\chi_{i_0})}(\delta) = \chi_{N_\sigma}(\delta) = g_{i_0+1}(\delta) = g_{i_0}(\delta)$$

(letzteres nach Wahl von i_0) im Widerspruch zur Wahl von γ. ■

6.3 Das Supremum von $\mathrm{pcf}_\mu(a)$

In diesem Abschnitt benutzen wir die Methode der Kontrollfunktionen, um die Ergebnisse aus Abschnitt 5 von [BM] zu beweisen. Wir werden diese Resultate aus der Sicht der pcf-Theorie formulieren.

Lemma 6.6. *Ist μ eine Kardinalzahl, so ist* $\sup\ \mathrm{pcf}_\mu(a) \leq (\sup a)^\mu$.

Beweis. Sei $A \subseteq a$ mit $|A| \leq \mu$, D ein Ultrafilter auf A und $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine modulo D kofinale Folge in $\prod A$. Diese Folge ist sicher injektiv und damit

$$\lambda \leq |\prod A| \leq (\sup A)^\mu \leq (\sup a)^\mu. \qquad ■$$

Analog beweist man das folgende Lemma:

Lemma 6.7. $\max\ \mathrm{pcf}(a) \leq \prod a \leq (\sup a)^{|a|}$

Der folgende Satz verallgemeinert [BM, 5.10] bzw. [Sh1, XIII 5.1]. Wir können jedoch hier einen wesentlich kürzeren Beweis angeben. Insbesondere müssen wir nicht unterscheiden zwischen $\mu = \omega$ und $\mu > \omega$ und benötigen nicht das Färbungslemma [BM, 5.13] sowie die dort benutzten „Approximationsbäume“.
Sind λ und μ Kardinalzahlen, so nennen wir λ **μ-stark**, wenn $\kappa^\mu < \lambda$ für alle Kardinalzahlen $\kappa < \lambda$ gilt. (Insbesondere gilt: Ist $\lambda > 2$, so ist $\mu < 2^\mu < \lambda$.)

Satz 6.8. *Sei a ein progressives Intervall regulärer Kardinalzahlen ohne Maximum, μ eine Kardinalzahl und* $\min a$ *μ-stark. Dann ist*

$$\sup\ \mathrm{pcf}_\mu(a) = (\sup a)^\mu.$$

Beweis. Nach Lemma 6.6 müssen wir nur noch „$\geq$“ zeigen. O.B.d.A. sei μ unendlich. Sei $\lambda := \min a$. Da λ μ-stark ist, ist $\lambda^\mu = \lambda$. (Dies folgt mit der Hausdorff-Formel, falls λ Nachfolgerkardinalzahl ist, oder mit [Je1, Ex. 6.8], falls λ schwach unerreichbar ist.) Daher ist auch λ^+ μ-stark. Da sich die Aussage des Satzes nicht ändert, wenn wir $a \setminus \{\min a\}$ statt a betrachten, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\lambda = \kappa^+$ und $\kappa > |a|$ regulär ist. Damit folgt nun, daß a keine Limeskardinalzahlen enthält. (Jede Limeskardinalzahl ν aus $[\min a, \sup a)_{\mathrm{CN}}$ ist offenbar Supremum von $a \cap \nu$. Daher gilt $\mathrm{cf}(\nu) \leq |a| < \min a \leq \nu$.) Da a progressiv und λ μ-stark ist, gilt ferner

$$|[a]^{\leq\mu}| = |a|^\mu < \lambda. \tag{10}$$

Für alle Limeszahlen $\alpha < \sup a$ mit $\mathrm{cf}(\alpha) = \kappa$ wählen wir einen Club C_α in α vom Ordnungstyp κ. $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_b : b \subseteq a)$ sei eine Kontrollfunktion für a. Für alle $b \subseteq a$ setzen wir

$$\mathfrak{F}'_b := \{f \in \mathfrak{F}_b : \forall\delta \in b\ \mathrm{cf}(f(\delta)) = \kappa\}$$

und außerdem

$$\mathfrak{G} := \bigcup\{\mathfrak{F}'_A : A \in [a]^{\leq\mu}\}.$$

Nach Lemma 6.3 und (10) ist $|\mathfrak{G}| \leq \sup\ \mathrm{pcf}_\mu(a)$. (Wir werden später sehen, daß $\mathfrak{G}$ nicht leer ist.) Für $f \in \mathfrak{G}$ definieren wir nun

$$\mathfrak{D}_f := \{(D_\delta : \delta \in \mathrm{Db}(f)) : \forall\delta \in \mathrm{Db}(f)\ D_\delta \in [C_{f(\delta)}]^{\leq\aleph_0}\}$$

und schließlich

$$\mathfrak{D} := \bigcup\{\mathfrak{D}_f : f \in \mathfrak{G}\}.$$

Ist $f \in \mathfrak{G}$, so ist $A := \mathrm{Db}(f) \in [a]^{\leq\mu}$ und für alle $\delta \in A$ ist $\mathrm{cf}(f(\delta)) = \kappa$, d.h. $C_{f(\delta)}$ ist definiert. Offenbar folgt $|\mathfrak{D}_f| \leq |{}^{\mu}([\kappa]^{\leq\aleph_0})| < \lambda$. Also ist $|\mathfrak{D}| \leq \sup\ \mathrm{pcf}_{\mu}(a)$.
Sei $\Theta > 2^{2^{\sup a}}$ regulär. Wir nennen eine elementare Unterstruktur M von $\mathrm{H}(\Theta)$ *schön*, wenn $|M| \leq \mu$ ist und es eine Folge in $\mathfrak{D}$ gibt, die M über a charakterisiert. Ist M schön, so ist $|\mathcal{P}(M)| \leq 2^{\mu}$. Finden wir für jedes $x \subseteq \sup a$ mit $|x| = \mu$ ein schönes M mit $x \subseteq M$, so folgt aus Lemma 5.12

$$(\sup a)^{\mu} = |[\sup a]^{\mu}| \leq 2^{\mu} \cdot |\{M \cap \sup a : M \text{ schön}\}| \leq \sup\ \mathrm{pcf}_{\mu}(a).$$

Damit wäre der Satz bewiesen.
Sei $x \subseteq \sup a$ mit $|x| = \mu$. Wir müssen ein schönes M mit $x \subseteq M$ konstruieren. Dazu wählen wir zunächst eine Approximationsfolge $(N_i : i \leq \kappa)$ in $\mathrm{H}(\Theta)$ mit

$$x \cup a \cup [a]^{\leq\mu} \cup \{\mathfrak{F}, a\} \subseteq N_0$$

und $|N_i| = \kappa$ für alle $i \leq \kappa$. Nach Satz 6.4 ist $\chi_{N_\kappa} \restriction A$ Element von $\mathfrak{F}_A$ und damit nach Lemma 5.14 von $\mathfrak{F}'_A$ für alle $A \in [a]^{\leq\mu}$. Für alle $\delta \in a$ gibt es nach diesem Lemma dann einen Club $C^*_\delta \subseteq N_\kappa \cap \delta$ in $\chi_{N_\kappa}(\delta)$ vom Ordnungstyp κ. O.B.d.A. können wir annehmen, daß $C^*_\delta \subseteq C_{\chi_{N_\kappa}(\delta)}$ ist. (Sonst schneiden wir die beiden Clubs. Man beachte dabei, daß $\kappa > \omega$ gilt.)
Nun definieren wir rekursiv eine aufsteigende Folge $(M_n : n < \omega)$ von elementaren Unterstrukturen von N_κ der Mächtigkeit μ: Zunächst sei M_0 elementare Unterstruktur von N_κ mit $x \subseteq M_0$ und $|M_0| = \mu$. Sei nun $n < \omega$, M_n bereits definiert und $\delta \in M_n \cap [\min a, \sup a)_{\mathrm{CN}}$. Dann ist $\chi_{M_n}(\delta^+) < \chi_{N_\kappa}(\delta^+)$, da $|M_n| = \mu < \kappa = \mathrm{cf}(\chi_{N_\kappa}(\delta^+))$ ist. Also gibt es ein $\sigma^n_{\delta^+} \in C^*_{\delta^+}$ mit $\chi_{M_n}(\delta^+) < \sigma^n_{\delta^+}$. M_{n+1} sei elementare Unterstruktur von N_κ mit $M_n \subseteq M_{n+1}$, $|M_{n+1}| = \mu$ und

$$\{\sigma^n_{\delta^+} : \delta \in M_n \cap [\min a, \sup a)_{\mathrm{CN}}\} \subseteq M_{n+1}.$$

Damit ist die Definition der M_n abgeschlossen, und wir setzen

$$M := \bigcup\{M_n : n < \omega\}$$

sowie $f := \chi_{N_\kappa} \restriction (M \cap a)$. Es ist $f \in \mathfrak{F}'_{M\cap a} \subseteq \mathfrak{G}$.
Sei $\varrho \in M \cap a$. Für $\varrho = \min a$ setzen wir $\Sigma_\varrho := \emptyset$. Anderenfalls ist $\varrho = \delta^+$ für ein $\delta \in [\min a, \sup a)_{\mathrm{CN}}$, da a keine Limeskardinalzahlen enthält, und $\delta \in M$. Wir wählen ein $n_\delta < \omega$ mit $\delta \in M_{n_\delta}$. Sei

$$\Sigma_\varrho := \{\sigma_\varrho^n : n_\delta \leq n < \omega\}.$$

Nach Konstruktion ist Σ_ϱ eine Teilmenge von C_ϱ^*, also von $C_{f(\varrho)}$. Die Folge $\Sigma := (\Sigma_\varrho : \varrho \in M \cap a)$ ist somit ein Element von $\mathfrak{D}_f$ und damit von $\mathfrak{D}$. Es bleibt zu zeigen, daß Σ die Menge M über a charakterisiert, also daß Σ_ϱ für alle $\varrho \in M \cap a$ unbeschränkt in $M \cap [\min a, \varrho)_{\mathrm{ON}}$ liegt.
Sei also $\varrho = \delta^+ \in M \cap a$ und $\gamma \in M \cap \varrho$. O.B.d.A. sei $\delta \geq \min a$. Wegen $\delta \in M \cap [\min a, \varrho)_{\mathrm{ON}}$ können wir $\gamma \geq \delta$ annehmen. Dann gibt es ein $n < \omega$ mit $n \geq n_\delta$ und $\gamma \in M_n \cap [\delta, \delta^+)_{\mathrm{ON}}$. Nach Konstruktion ist σ_ϱ^n größer als γ und Element von Σ_ϱ. ■

Wir zeigen nun noch kurz, daß [BM, 5.1] eine Folgerung des eben bewiesenen Satzes ist:

Korollar 6.9. *Ist a ein Intervall regulärer Kardinalzahlen ohne Maximum mit $(\min a)^{|a|} < \sup a$, so ist*

$$\max\ \mathrm{pcf}(a) = \prod a.$$

Beweis. Sei $\kappa := ((\min a)^{|a|})^+$. Da $\sup a \leq \prod a$ und $\sup a$ eine Limeskardinalzahl ist, ist $\kappa < \prod a$. Ist $\nu < \kappa$ eine Kardinalzahl, so ist

$$\nu^{|a|} \leq ((\min a)^{|a|})^{|a|} = (\min a)^{|a|} < \kappa,$$

d.h. κ ist $|a|$-stark. Wir setzen $b := [\kappa, \sup a)_{\mathrm{reg}}$. Dann ist $\prod(a \setminus b) \leq \kappa^{|a|} = \kappa$, wegen $\prod a = \prod(a \setminus b) \cdot \prod b$ muß also $\prod a = \prod b$ gelten. Mit Satz 6.8 folgt

$$\max\ \mathrm{pcf}(a) \geq \max\ \mathrm{pcf}(b) = \sup\ \mathrm{pcf}_{|b|}(b) \geq (\sup b)^{|b|} \geq \prod b = \prod a.$$

Mit Lemma 6.7 folgt die Behauptung. ■

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen dieses Korollars gilt also auch

$$\mathrm{cf}(\prod a) = \prod a$$

nach Satz 4.22.

6.4 Kofinalität bzgl. $\subseteq$

Ist B eine beliebige Menge, so setzen wir

$$\mathrm{cf}_{\subseteq}(B) := \min\{|C| : C \subseteq B \wedge \forall x \in B\, \exists y \in C\; x \subseteq y\}.$$

$\mathrm{cf}_{\subseteq}(B)$ ist also die kleinste Mächtigkeit einer Teilmenge von B, die bezüglich der Halbordnung $\subseteq$ *kofinal* in B liegt. Da B selbst so eine Menge ist, ist $\mathrm{cf}_{\subseteq}(B)$ immer definiert.
Wir geben zunächst einige einfache Eigenschaften dieses Kofinalitätsbegriffes an.

Lemma 6.10. *Sind λ und κ Kardinalzahlen mit $\omega \leq \kappa \leq \lambda$, so gilt*

$$\mathrm{cf}_{\subseteq}([\lambda]^{\leq\kappa}) + 2^{\kappa} = \lambda^{\kappa}.$$

Beweis. Offenbar müssen wir nur „$\geq$" beweisen. Sei $\mathfrak{S}$ eine bezüglich $\subseteq$ kofinale Teilmenge von $[\lambda]^{\leq\kappa}$. Dann ist $[\lambda]^{\leq\kappa} = \bigcup\{[S]^{\leq\kappa} : S \in \mathfrak{S}\}$, also

$$\lambda^{\kappa} = |[\lambda]^{\leq\kappa}| \leq \sum_{S \in \mathfrak{S}} |[S]^{\leq\kappa}| \leq |\mathfrak{S}| \cdot 2^{\kappa}.$$

Damit folgt sofort die Behauptung. ■

Lemma 6.11. *Für alle Kardinalzahlen λ ist* $\mathrm{cf}_{\subseteq}([\lambda]^{\leq\lambda}) = 1$.

Lemma 6.12. *Sei λ unendliche Kardinalzahl und $\kappa \in [1, \lambda)_{\mathrm{CN}}$. Dann gilt*

$$\mathrm{cf}_{\subseteq}([\lambda]^{\leq\kappa}) \geq \lambda.$$

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{P} \subseteq [\lambda]^{\leq\kappa}$ ist kofinal in $[\lambda]^{\leq\kappa}$ mit $|\mathfrak{P}| < \lambda$. Dann ist $|\bigcup\mathfrak{P}| < \lambda$, also gibt es ein $x \in \lambda \setminus \bigcup\mathfrak{P}$. Dazu gibt es dann *kein* $P \in \mathfrak{P}$ mit $\{x\} \subseteq P$. ■

Lemma 6.13. *Sind κ und λ Kardinalzahlen mit $\omega \leq \kappa \leq \lambda$, so ist*

$$\mathrm{cf}_{\subseteq}([\lambda^{+}]^{\leq\kappa}) \leq \lambda^{+} + \mathrm{cf}_{\subseteq}([\lambda]^{\leq\kappa}).$$

Beweis. Für $\alpha \in [\lambda, \lambda^{+})_{\mathrm{ON}}$ sei $\mathfrak{P}_{\alpha}$ jeweils kofinal in $[\alpha]^{\leq\kappa}$ mit $|\mathfrak{P}_{\alpha}| = \mathrm{cf}_{\subseteq}([\lambda]^{\leq\kappa})$. Wir setzen

$$\mathfrak{P} := \bigcup\{\mathfrak{P}_{\alpha} : \alpha \in [\lambda, \lambda^{+})_{\mathrm{ON}}\}.$$

Offenbar gilt $|\mathfrak{P}| = \lambda^{+} + \mathrm{cf}_{\subseteq}([\lambda]^{\leq\kappa})$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{P}$ kofinal in $[\lambda^{+}]^{\leq\kappa}$ ist:
Ist $X \subseteq \lambda^{+}$ mit $|X| \leq \kappa$, so gibt es ein $\alpha \in [\lambda, \lambda^{+})_{\mathrm{ON}}$ mit $X \subseteq \alpha$, da λ^{+} regulär ist. Dazu gibt es ein $P \in \mathfrak{P}_{\alpha} \subseteq \mathfrak{P}$ mit $X \subseteq P$. ■

Korollar 6.14. *Ist λ unendliche Kardinalzahl und $1 \leq n < \omega$, so ist*

$$\mathrm{cf}_{\subseteq}([\lambda^{+n}]^{\leq\lambda}) = \lambda^{+n}.$$

Lemma 6.15. *Seien κ und λ Kardinalzahlen mit $\omega < \kappa^+ < \lambda$. Dann ist*

$$\mathrm{cf}_{\subseteq}([\lambda]^{\leq\kappa}) \leq \mathrm{cf}_{\subseteq}([\lambda]^{\leq\kappa^+}).$$

Beweis. Sei $\mathfrak{P}$ kofinal in $[\lambda]^{\leq\kappa^+}$ und o.B.d.A. $|P| = \kappa^+$ für alle $P \in \mathfrak{P}$. $(x^P_\alpha : \alpha < \kappa^+)$ sei jeweils eine Bijektion von κ^+ auf $P \in \mathfrak{P}$. Wir setzen $M^P_\alpha := \{x^P_\beta : \beta < \alpha\}$ für $P \in \mathfrak{P}$ und $\alpha < \kappa^+$ sowie

$$\mathfrak{M} := \{M^P_\alpha : P \in \mathfrak{P} \wedge \alpha < \kappa^+\}.$$

Dann ist $|\mathfrak{M}| \leq |\mathfrak{P}| + \kappa^+$, nach Lemma 6.12 also $|\mathfrak{M}| \leq |\mathfrak{P}|$.
Wir zeigen, daß $\mathfrak{M}$ kofinal in $[\lambda]^{\leq\kappa}$ ist: Ist $X \subseteq \lambda$ mit $|X| \leq \kappa$, so gibt es ein $P \in \mathfrak{P}$ mit $X \subseteq P$. Da κ^+ regulär ist, existiert ein $\alpha < \kappa^+$ mit $X \subseteq M^P_\alpha \in \mathfrak{M}$. ■

Bemerkung. Diese Aussage gilt *nicht* für $\kappa^+ = \lambda$, wie aus den Lemmata 6.11 und 6.12 folgt.

Der folgende Satz entspricht Theorem 3.6 in [Sh5]. Behauptung und Beweis dort sind jedoch unvollständig. Der vorliegende Beweis entstand auf der Basis von [Sh7] und wurde mittels des Konzeptes der charakterisierenden Mengen vereinfacht.

Satz 6.16. *Sei λ_0 unendliche Kardinalzahl, $1 \leq \alpha^* < \lambda_0$ und $\lambda := \lambda_0^{+\alpha^*}$. Dann gilt*

$$\mathrm{cf}_{\subseteq}([\lambda]^{\leq\lambda_0}) = \max\ \mathrm{pcf}(\{\lambda_0^{+(\beta+1)} : \beta < \alpha^*\}).$$

Beweis. Sei $a := \{\lambda_0^{+(\beta+1)} : \beta < \alpha^*\}$. Offenbar ist a progressiv und damit ein Intervall von regulären Kardinalzahlen. (Jede Limeskardinalzahl zwischen λ_0 und λ hat eine Kofinalität, die kleiner als α^* ist.) Wir beweisen zunächst „$\geq$“:
Sei $\mathfrak{P}$ kofinal in $[\lambda]^{\leq\lambda_0}$. Wir setzen

$$f_P(\delta) := \sup(P \cap \delta)$$

für $P \in \mathfrak{P}$ und $\delta \in a$. Wegen $|P| \leq \lambda_0 < \min a$ ist $f_P \in \prod a$ für alle $P \in \mathfrak{P}$. Nach Satz 4.22 reicht es aus, $\mathrm{cf}(\prod a) \leq |\mathfrak{P}|$ zu zeigen: Sei $f \in \prod a$. Wegen $|a| < \lambda_0$ ist $\mathrm{Wb}(f) \in [\lambda]^{\leq \lambda_0}$, also gibt es ein $P \in \mathfrak{P}$ mit $\mathrm{Wb}(f) \subseteq P$ und damit

$$f(\delta) \leq \sup(P \cap \delta) = f_P(\delta)$$

für alle $\delta \in a$, d.h. $f \leq f_P$.
Wir beweisen nun die andere Richtung. O.B.d.A. können wir $\alpha^* \geq \omega$ annehmen. (Sonst ist $\max\ \mathrm{pcf}(a) = \max(a) = \lambda$ und $\mathrm{cf}_{\subseteq}([\lambda]^{\leq \lambda_0}) = \lambda$ nach Korollar 6.14.) Außerdem können wir $\sigma := |\alpha^*|^+ < \lambda_0$ voraussetzen. (Gilt dies nicht, so beweisen wir den Satz für λ_0^+ statt für λ_0. Die Behauptung folgt dann mit

$$\max\ \mathrm{pcf}(\{\lambda_0^{+(\beta+1)} : \beta < \alpha^*\}) = \max\ \mathrm{pcf}(\{(\lambda_0^+)^{+(\beta+1)} : \beta < \alpha^*\})$$

und Lemma 6.15.)
Sei $\Theta > 2^{2^{\sup a}}$ regulär und $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_b : b \subseteq a)$ eine Kontrollfunktion für a. Wir setzen

$$\mathfrak{G} := \{f \in \mathfrak{F}_a : \forall \delta \in a\ \ \mathrm{cf}(f(\delta)) = \sigma\}.$$

Für jedes $\alpha < \lambda$ mit $\mathrm{cf}(\alpha) = \sigma$ wählen wir einen Club C_α in α vom Ordnungstyp σ. Für jedes $f \in \mathfrak{G}$ sei N_f eine elementare Unterstruktur von $\mathrm{H}(\Theta)$ mit $|N_f| = \lambda_0$ und

$$\lambda_0 \cup a \cup \bigcup \{C_{f(\delta)} : \delta \in a\} \subseteq N_f.$$

Nach Lemma 6.3 ist $|\mathfrak{G}| \leq \max\ \mathrm{pcf}(a)$. Es reicht also zu zeigen, daß die Menge

$$\{N_f \cap \lambda : f \in \mathfrak{G}\}$$

bzgl. $\subseteq$ kofinal in $[\lambda]^{\leq \lambda_0}$ ist:
Sei $X \subseteq \lambda$ mit $|X| \leq \lambda_0$. Dazu sei $(M_i : i \leq \sigma)$ eine Approximationsfolge in $\mathrm{H}(\Theta)$ mit $|M_i| = \lambda_0$ für alle $i < \sigma$ und

$$X \cup \lambda_0 \cup a \cup \{\mathfrak{F}, a\} \subseteq M_0.$$

Nach Satz 6.4 ist $f := \chi_{M_\sigma} \restriction a \in \mathfrak{F}_a$. Nach Lemma 5.14 gibt es für alle $\delta \in a$ einen Club $D_\delta \subseteq M_\sigma \cap \delta$ vom Ordnungstyp σ in $f(\delta)$ — insbesondere folgt damit $f \in \mathfrak{G}$.

Da σ überabzählbar ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $D_\delta \subseteq C_{f(\delta)}$ ist, anderenfalls schneiden wir die beiden Clubs. Damit ist $(D_\delta : \delta \in a)$ eine Folge von Teilmengen von N_f, die M_σ über a charakterisiert. (O.B.d.A. sei $\min a \leq \min D_\delta$ für $\delta \in a$.) Mit Lemma 5.11 folgt sofort $X \subseteq M_\sigma \cap \lambda \subseteq N_f \cap \lambda$. ■

7 Grundmengen, die nicht progressiv sind

7.1 Schwach progressive Mengen

Viele wichtige Resultate der pcf-Theorie wurden für progressive Mengen a bewiesen, also für solche mit $|a| < \min a$. Häufig kann man sich jedoch klar machen, daß etwa die Hinzunahme von endlich vielen Elementen, die die Progressivität verletzen, die Gültigkeit der Sätze nicht ändert.
Betrachten wir z.B. Lemma 4.21: Ist a progressiv und b eine beliebige endliche Menge von regulären Kardinalzahlen, so ist $\mathrm{pcf}(a \cup b) = \mathrm{pcf}(a) \cup b$. Da sowohl $\mathrm{pcf}(a)$ als auch b ein Maximum besitzen, besitzt auch $\mathrm{pcf}(a \cup b)$ eines, obwohl $a \cup b$ nicht unbedingt progressiv sein muß.
Solch eine Menge $a \cup b$ ist gewissermaßen „fast progressiv". Andererseits kann man sich Mengen konstruieren, die sozusagen „extrem nicht-progressiv" sind: Ist λ ein Fixpunkt der $\aleph$-Funktion und a das Intervall $[\aleph_0, \lambda)_{\mathrm{reg}}$, so ist *kein* Endstück von a progressiv.
Wir versuchen hier, den Begriff der Progressivität so weit zu verallgemeinern, daß die wesentlichen strukturellen Resultate aus dem zweiten Kapitel erhalten bleiben.
Wir nennen eine Menge a von regulären Kardinalzahlen **schwach progressiv**, wenn für jeden Fixpunkt λ der $\aleph$-Funktion $|a \cap \lambda| < \lambda$ gilt.

Lemma 7.1. *Ist $a \neq \emptyset$ schwach progressiv, so gibt es eine nichtleere Teilmenge b von a mit:*

(i) *b ist progressiv.*

(ii) $a \setminus b \subseteq \min b$

Beweis. Besitzt a ein Maximum, so setzen wir $b := \{\max a\}$. Anderenfalls sei $\lambda := \sup a$. Dann ist $\lambda = \aleph_\delta$ für eine Limesordinalzahl δ. Ist λ kein Fixpunkt der $\aleph$-Funktion, so ist $|a| \leq |\delta| < \lambda$, anderenfalls ist $|a| < \lambda$ nach Definition des Begriffes „schwach progressiv". In beiden Fällen können wir $b := a \setminus (|a| + 1)$ wählen. ■

Lemma 7.2. *Eine Menge a von regulären Kardinalzahlen ist schwach progressiv genau dann, wenn es ein $n \in \omega$ und Mengen $a_1, \ldots, a_n$ gibt mit:*

(i) *Für alle* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *ist* a_i *progressiv.*

(ii) $1 \leq i < n \implies a_{i+1} \neq \emptyset \wedge a_i \subseteq \min a_{i+1}$

(iii) $a = a_1 \cup \cdots \cup a_n$

Bemerkung. Man beachte, daß (ii) insbesondere impliziert, daß die a_i paarweise disjunkt sind.

Beweis. Seien zunächst $a, a_1, \ldots, a_n$ Mengen von regulären Kardinalzahlen mit den Eigenschaften (i) bis (iii). O.B.d.A. sei a unendlich. Ist λ eine beliebige Kardinalzahl und $1 \leq i \leq n$, so ist $a_i \cap \lambda = \emptyset$ oder

$$|a_i \cap \lambda| \leq |a_i| < \min a_i < \lambda.$$

Damit ist offenbar

$$|a \cap \lambda| = \sum_{i=1}^{n} |a_i \cap \lambda| < \lambda.$$

Nun zeigen wir die andere Richtung: O.B.d.A. sei $a \neq \emptyset$. Wir setzen $c_1 := a$. Rekursiv wählen wir nun für $i \in \omega \setminus 1$ zu $c_i \subseteq a$ eine progressive Menge $b_i \neq \emptyset$ wie im obigen Lemma (für c_i statt a) und setzen $c_{i+1} := c_i \setminus b_i$, falls $c_i \neq \emptyset$ ist. Ist $c_{i+1} \neq \emptyset$, so ist $\min b_{i+1} < \min b_i$. Es muß also ein (minimales) $n < \omega$ mit $c_{n+1} = \emptyset$ geben. Wir setzen $a_i := b_{n+1-i}$ für $1 \leq i \leq n$. ■

Nach dieser Charakterisierung ist offenbar insbesondere jede progressive Menge schwach progressiv. Wir geben nun einige Beispiele für Mengen an, die schwach progressiv, aber nicht unbedingt progressiv sind:

Beispiel A. Da Singletons immer progressiv sind, ist jede Menge der Art $a \cup b$ schwach progressiv, falls a progressive und b endliche Menge von regulären Kardinalzahlen ist. (Dies entspricht dem Beispiel vom Beginn dieses Abschnittes.)

Beispiel B. Ist a eine Menge von regulären Kardinalzahlen, deren Häufungspunkte alle nicht Fixpunkte der $\aleph$-Funktion sind, so ist a schwach progressiv: Ist λ ein Fixpunkt, so ist $\kappa := \sup(a \cap \lambda) < \lambda$, also $|a \cap \lambda| \leq \kappa < \lambda$.

Beispiel C. Rekursiv setzen wir $\gamma_0 := \aleph_0$, $\gamma_{i+1} := \aleph_{\gamma_i}$ für $i < \omega$ und schließlich $\gamma := \sup\{\gamma_i : i < \omega\}$. Dann ist γ bekanntlich der kleinste Fixpunkt der $\aleph$-Funktion. $\{\gamma_i^+ : i < \omega\}$ ist sicher eine (schwach) progressive Menge. Schwach progressive Mengen können also Häufungspunkte haben, die Fixpunkte der $\aleph$-Funktion sind.

Wir zeigen nun, daß die wesentlichen strukturellen Ergebnisse aus dem zweiten Kapitel auch für schwach progressive Mengen gelten:

Lemma 7.3. *Sei λ eine Kardinalzahl, a schwach progressiv und I ein λ-mächtiges Ideal auf a. Dann ist $\prod a/I$ λ-gerichtet.*

Beweis. Sei S eine Teilmenge von $\prod a$ mit $|S| < \lambda$. $a_1, \ldots, a_n$ seien wie in Lemma 7.2 gewählt. Dazu definieren wir $P := \{i < \omega : 1 \leq i \leq n \wedge a_i \in I^+\}$.
Ist $i \in P$, so ist $I_i := I \cap \mathcal{P}(a_i)$ ein λ-mächtiges Ideal auf a_i. (Ist $b \subseteq a_i$ mit $b \notin I_i$, so ist $b \notin I$, also gibt es einen Ultrafilter D auf a mit $D \cap I = \emptyset$, $b \in D$ und $\mathrm{cf}(\prod a/D) \geq \lambda$. Wegen $b \in D$ ist $a_i \in D$, also ist $D_i := D \cap \mathcal{P}(a_i)$ ein Ultrafilter auf a_i, der I_i erweitert, b enthält und für den $\mathrm{cf}(\prod a_i/D_i) \geq \lambda$ gilt.) Nach Satz 4.5 gibt es ein $f_i \in \prod a_i$ mit $g \restriction a_i \leq_{I_i} f_i$, d.h. $\mathrm{B}(f_i, g \restriction a_i) \in I$ für alle $g \in S$.
Für $i \in P' := \{1, \ldots, n\} \setminus P$ wählen wir ein beliebiges $f_i \in \prod a_i$. Sei $f := \bigcup\{f_i : 1 \leq i \leq n\}$. Ist $g \in S$, so ist

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(f, g) &= \bigcup\{\mathrm{B}(f_i, g \restriction a_i) : 1 \leq i \leq n\} \\ &\subseteq \bigcup\{\mathrm{B}(f_i, g \restriction a_i) : i \in P\} \cup \bigcup\{a_i : i \in P'\} \in I, \end{aligned}$$

d.h. $g \leq_I f$. ■

Hiermit folgt sofort, daß die Aussagen 4.6 bis 4.18 alle auch für schwach progressive a gelten (sofern sie nicht ohnehin schon für beliebige a formuliert wurden). Wird die Progressivität in den Beweisen benutzt, so reicht es jeweils Satz 4.5 durch Lemma 7.3 zu ersetzen.
Wir verallgemeinern nun Korollar 3.20 bzw. [BM, 4.1] auf schwach progressive Mengen:

Lemma 7.4. *Sei a eine schwach progressive Menge von regulären Kardinalzahlen, I ein Ideal auf a, λ regulär und $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine modulo I streng monoton* *steigende, in $\prod a$ modulo I unbeschränkte Folge von Elementen von $\prod a$. Dann gibt es ein $g \in \prod a$ und I-positive Mengen $b_i \subseteq a$ mit:*

(i) *Für $i < j < \lambda$ ist $b_i \subseteq_I b_j$.*

(ii) *Für alle $i < \lambda$ ist $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ kofinal in $\prod a$ modulo $I \restriction b_i$.*

(iii) *Ist J ein Ideal auf a mit $I \subseteq J$ und $b_i \in J$ für alle $i < \lambda$, so ist g modulo J obere Schranke von $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$.*

Beweis. Seien $a_1, \ldots, a_n$ wie in Lemma 7.2 gewählt. O.B.d.A. sei $|a_i|^+ < \min a_i$ für alle i. (Gegebenenfalls zerlege man a_i in $\{\min a_i\}$ und $a_i \setminus \{\min a_i\}$.) Gäbe es für alle k mit $1 \leq k \leq n$ eine obere Schranke $g^k \in \prod a_k$ für $(f_\alpha \restriction a_k : \alpha < \lambda)$ modulo $I_k := I \cap \mathcal{P}(a_k)$, so wäre $g^1 \cup \cdots \cup g^n$ eine obere Schranke modulo I für die Ausgangsfolge. Sei $X \neq \emptyset$ die Menge der $k \in \{1, \ldots, n\}$, für die solch eine Schranke g^k nicht existiert. Insbesondere muß natürlich $a_k \in I^+$ für $k \in X$ gelten. Ist $k \in X$, so ist sicher $\lambda > |a_k|^+$, denn sonst ist $\sup\{f_\alpha \restriction a_k : \alpha < \lambda\}$ eine obere Schranke. Nach Korollar 3.20 gibt es daher eine Folge $(b_i^k : i < \lambda)$ von Teilmengen von a_k und ein $g^k \in \prod a_k$, die (i) bis (iii) (für a_k, I_k und $(f_\alpha \restriction a_k : \alpha < \lambda)$ statt a, I und $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$) erfüllen.
Wir setzen $b_i := \bigcup\{b_i^k : k \in X\}$ für $i < \lambda$ und $g := g^1 \cup \cdots \cup g^n$. Man rechnet leicht nach, daß damit das Lemma bewiesen ist. ■

Lemma 7.5. *Ist a schwach progressiv, λ Kardinalzahl und $b \in \mathcal{J}_{<\lambda^+}(a) \setminus \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$, so ist* $\mathrm{tcf}(\prod a/(\mathcal{J}_{<\lambda}(a) \restriction b)) = \lambda$.

Beweis. Seien $a_1, \ldots, a_n$ wie in Lemma 7.2 gewählt. Ist $1 \leq i \leq n$, so ist $b_i := b \cap a_i \in \mathcal{J}_{<\lambda^+}(a_i) \setminus \mathcal{J}_{<\lambda}(a_i)$ nach Korollar 4.8. Nach Lemma 4.19 gibt es eine Folge $(f_\alpha^i : \alpha < \lambda)$, die modulo $\mathcal{J}_{<\lambda}(a_i) \restriction b_i$ kofinal in $\prod a_i$ ist.
Durch $f_\alpha := f_\alpha^1 \cup \cdots \cup f_\alpha^n$ für $\alpha < \lambda$ erhält man nun offenbar eine Folge, die das Lemma beweist. ■

Mit Hilfe von Korollar 4.8 erhält man sofort:

Lemma 7.6. *Sind a und b Mengen von regulären Kardinalzahlen, so ist*

$$\mathcal{J}_{<\lambda}(a \cup b) = \langle \mathcal{J}_{<\lambda}(a) \cup \mathcal{J}_{<\lambda}(b) \rangle.$$

Lemma 7.7. *Seien a und b Mengen von regulären Kardinalzahlen, und sei λ eine Kardinalzahl. Erzeugt b^a das Ideal $\mathcal{J}_{<\lambda^+}(a)$ über $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ und b^b das Ideal $\mathcal{J}_{<\lambda^+}(b)$ über $\mathcal{J}_{<\lambda}(b)$, so erzeugt $b^a \cup b^b$ das Ideal $\mathcal{J}_{<\lambda^+}(a \cup b)$ über $\mathcal{J}_{<\lambda}(a \cup b)$.*

Beweis. Sei $c \in \mathcal{J}_{<\lambda^+}(a \cup b)$. Nach Korollar 4.8 ist $c \cap a \in \mathcal{J}_{<\lambda^+}(a)$, also $(c \cap a) \setminus b^a \in \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$. Analog ist $(c \cap b) \setminus b^b \in \mathcal{J}_{<\lambda}(b)$. Es folgt

$$c \setminus (b^a \cup b^b) \subseteq ((c \cap a) \setminus b^a) \cup ((c \cap b) \setminus b^b) \in \mathcal{J}_{<\lambda}(a \cup b). \qquad \blacksquare$$

Damit folgt sofort, daß auch jede schwach progressive Menge eine Generatorenfolge besitzt. (Man setzt diese einfach aus den Generatorenfolgen für die a_i aus Lemma 7.2 zusammen.) Daß auch die restlichen Aussagen des zweiten Abschnittes (Lemma 4.24 bis Korollar 4.27) für schwach progressive Mengen gelten, läßt sich nun leicht überprüfen.
Ein weiteres Ergebnis, das wir verallgemeinern können, ist Satz 6.5:

Lemma 7.8. *Ist a schwach progressiv, so gibt es keine Folge $(\chi_i : i < |a|^+)$ in* $\mathrm{pcf}(a)$ *mit*

$$\max\ \mathrm{pcf}(\{\chi_j : j < i\}) < \chi_i$$

für alle $i < |a|^+$.

Beweis. Seien $a_1, \ldots, a_n$ wie üblich gewählt und o.B.d.A. a unendlich. Für alle $i < |a|^+$ gibt es nach Lemma 4.3 ein $k_i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\chi_i \in \mathrm{pcf}(a_{k_i})$. Da a unendlich ist, muß es ein k geben, so daß $k_i = k$ für $|a|^+$ viele $i < |a|^+$ gilt.

$$(\chi_i : i < |a|^+ \wedge k_i = k)$$

ist dann eine Folge, die Satz 6.5 (für a_k statt a) widerspricht. $\blacksquare$

Ist λ ein *regulärer* Fixpunkt der $\aleph$-Funktion, also eine schwach unerreichbare Kardinalzahl, so kann λ sicher nicht Häufungspunkt einer schwach progressiven Menge sein. Eine natürliche Verallgemeinerung des Begriffes „schwach progressiv“ wäre also die, Mengen von regulären Kardinalzahlen zu betrachten, die keine Häufungspunkte haben, die regulär sind.
Dies ist eine echte Verallgemeinerung: Ist γ wie in Beispiel C gewählt, so hat $[\aleph_0, \gamma)_{\mathrm{reg}}$ keinen regulären Häufungspunkt, ist aber nicht schwach progressiv.

Leider ist es mir nicht gelungen, für solche Mengen strukturelle Analogien zur „klassischen“ pcf-Theorie wie in diesem Abschnitt zu beweisen. Im nächsten Abschnitt folgen wir jedoch einem Ansatz von Shelah, der in die gleiche Richtung geht. Wir betrachten allerdings nicht beliebige Mengen von regulären Kardinalzahlen, sondern nur solche, die durch die Anwendung des pcf-Operators auf eine progressive Menge entstanden sind.

7.2 Die Ideale $\mathcal{J}_*(b)$ und $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$

In [Sh5, VIII 3.1] führt Shelah einige neue Begriffe ein, die wir hier untersuchen und charakterisieren wollen. Wir geben zunächst einen kurzen Überblick: Wir betrachten statt einer progressiven Menge a die Menge $\mathrm{pcf}(a)$, die im allgemeinen nicht progressiv ist. Zwar existiert dann das wichtige Ideal $\mathcal{J}_{<\lambda}(\mathrm{pcf}(a))$, aber die meisten Resultate aus den letzten Kapiteln lassen sich nicht anwenden.
Stattdessen übertragen wir die Idealstruktur von a auf $\mathrm{pcf}(a)$ und erzeugen hier das Ideal $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$. Betrachten wir nun nicht alle Teilmengen von $\mathrm{pcf}(a)$, sondern nur die, die in der Menge $\mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a))$ liegen, so erhalten wir eine ganze Reihe von Analogien zu bekannten Ergebnissen über progressive Mengen. Dies setzt sich fort, wenn wir den pcf-Operator ersetzen durch pcf_*.
Für den Rest des gesamten Textes sei a stets eine progressive Menge von regulären Kardinalzahlen. Das erste Lemma beinhaltet eine Definition. Man beachte, daß diese Definition gerechtfertigt ist, da nach Satz 4.23 immer eine Generatorenfolge existiert.

Lemma 7.9. *Sei* $\lambda \leq \max\ \mathrm{pcf}(a)$ *eine Kardinalzahl. Sind* $(b_\mu : \mu \in \mathrm{pcf}(a))$ *und* $(b'_\mu : \mu \in \mathrm{pcf}(a))$ *Generatorenfolgen für a, so erzeugen* $\{\mathrm{pcf}(b_\mu) : \mu \in \lambda \cap \mathrm{pcf}(a)\}$ *und* $\{\mathrm{pcf}(b'_\mu) : \mu \in \lambda \cap \mathrm{pcf}(a)\}$ *dasselbe Ideal auf* $\mathrm{pcf}(a)$*. Wir bezeichnen es mit* $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$*.*

Beweis. [Sh5, VIII 3.1A] Sind $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \lambda \cap \mathrm{pcf}(a)$ mit o.B.d.A. $\mu_1 < \cdots < \mu_n$, so ist

$$\max(\mathrm{pcf}(b_{\mu_1}) \cup \cdots \cup \mathrm{pcf}(b_{\mu_n})) = \max\ \mathrm{pcf}(b_{\mu_n}) = \mu_n < \lambda,$$

also $\mathrm{pcf}(b_{\mu_1}) \cup \cdots \cup \mathrm{pcf}(b_{\mu_n}) \neq \mathrm{pcf}(a)$. Daher erzeugt $\{\mathrm{pcf}(b_\mu) : \mu \in \lambda \cap \mathrm{pcf}(a)\}$ ein echtes Ideal auf $\mathrm{pcf}(a)$.

Sei $\mu \in \lambda \cap \mathrm{pcf}(a)$. Nach Korollar 4.27 gibt es $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathrm{pcf}(b_\mu)$ mit $b_\mu \subseteq b'_{\nu_1} \cup \cdots \cup b'_{\nu_n}$, also $\mathrm{pcf}(b_\mu) \subseteq \mathrm{pcf}(b'_{\nu_1}) \cup \cdots \cup \mathrm{pcf}(b'_{\nu_n})$. Wegen $\mathrm{pcf}(b_\mu) \subseteq \lambda \cap \mathrm{pcf}(a)$ folgt so leicht die Behauptung. ■

Ist λ eine Kardinalzahl mit $\lambda > \max\ \mathrm{pcf}(a)$, so definieren wir

$$\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) := \mathcal{P}(\mathrm{pcf}(a)).$$

Für den Rest dieses Kapitels sei $(b_\lambda : \lambda \in \mathrm{pcf}(a))$ *stets eine Generatorenfolge für* a *und speziell* $b_{\max\ \mathrm{pcf}(a)} = a$.

Zunächst einige Ergebnisse, die sofort aus der Definition von $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$ folgen. Die ersten vier Lemmata sind die zu Korollar 4.9, Korollar 4.13, Lemma 4.18 und Satz 4.23 analogen Aussagen.

Lemma 7.10. *Sind* κ *und* λ *Kardinalzahlen mit* $\kappa < \lambda$, *so ist* $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\kappa}(a) \subseteq \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$.

Lemma 7.11. *Für jede Kardinalzahl* λ *gilt*

$$\lambda \in \mathrm{pcf}(a) \iff \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) \neq \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda^+}(a).$$

Lemma 7.12. *Ist* λ *Limeskardinalzahl, so ist* $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) = \bigcup\{\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\mu}(a) : \mu < \lambda\}$.

Lemma 7.13. *Ist* $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$, *so erzeugt* $\mathrm{pcf}(b_\lambda)$ *das Ideal* $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda^+}(a)$ *über* $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$.

Lemma 7.14. *Für jede Kardinalzahl* λ *ist* $\mathcal{J}_{<\lambda}(a) \subseteq \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$.

Lemma 7.15. *Ist* $b \subseteq a$ *und* λ *eine Kardinalzahl, so ist* $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(b) \subseteq \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$.

Beweis. $(b_\mu \cap b : \mu \in \mathrm{pcf}(b))$ ist eine Generatorenfolge für b. ■

Wir geben nun ein allgemeines Verfahren an, mit dem wir Funktionen in $\prod a$ auf Funktionen in $\prod \mathrm{pcf}(a)$ abbilden. Dazu sei für alle $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$ eine Folge $(f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda)$ von Elementen von $\prod a$ mit

(i) $(f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda)$ steigt modulo $\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ streng monoton, und

(ii) $\{f^\lambda_\alpha \restriction b_\lambda : \alpha < \lambda\}$ liegt kofinal in $\prod b_\lambda$

fest gewählt. So eine Folge erhält man sofort, wenn man sich eine spezielle Folge $\bar{f}$ wie auf Seite 54 wählt und $f_\alpha^\lambda := f_\alpha^{b_\lambda}$ für $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$ und $\alpha < \lambda$ setzt.
Jeder Ordinalfunktion $f \in \prod a$ ordnen wir eine Ordinalfunktion $f^* \in \prod \mathrm{pcf}(a)$ zu, indem wir

$$f^*(\delta) := \begin{cases} f(\delta) & \delta \in a \\ \min\{\gamma < \delta : f \leq_{(\mathcal{J}_{<\delta}(a) \restriction b_\delta)} f_\gamma^\delta\} & \delta \notin a \end{cases}$$

für $\delta \in \mathrm{pcf}(a)$ setzen.
Wir beobachten nun, daß sich Beziehungen zwischen Ordinalfunktionen auf a auf die zugeordneten Funktionen auf $\mathrm{pcf}(a)$ übertragen:
Das erste Lemma folgt sofort aus der Definition.

Lemma 7.16. *Sind f und g Funktionen aus $\prod a$ mit $f \leq g$, so ist $f^* \leq g^*$.*

Lemma 7.17. *Sind $f, g \in \prod a$ und ist λ eine Kardinalzahl mit $f \leq_{\mathcal{J}_{<\lambda}(a)} g$, so ist $f^* \leq_{\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)} g^*$.*

Beweis. Es gilt $c := \mathrm{B}(g, f) \in \mathcal{J}_{<\lambda}(a)$, also existieren nach Korollar 4.27 Elemente $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ von $\lambda \cap \mathrm{pcf}(a)$ mit $c \subseteq B := \bigcup\{b_{\sigma_i} : 1 \leq i \leq n\}$. Ist nun $\delta \in \mathrm{pcf}(a) \setminus a$ und $b_\delta \cap B \in \mathcal{J}_{<\delta}(a)$, so ist $b_\delta \cap c \in \mathcal{J}_{<\delta}(a)$, d.h. $f \leq_{(\mathcal{J}_{<\delta}(a) \restriction b_\delta)} g$ und damit $f^*(\delta) \leq g^*(\delta)$.
Wir haben also gezeigt, daß

$$\mathrm{B}(g^*, f^*) \setminus a \subseteq d := \{\delta \in \mathrm{pcf}(a) : b_\delta \cap B \notin \mathcal{J}_{<\delta}(a)\}$$

gilt. Nach Lemma 7.14 reicht es zu zeigen, daß $d \in \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$ ist. Es ist

$$\mathrm{pcf}(B) = \bigcup\{\mathrm{pcf}(b_{\sigma_i}) : 1 \leq i \leq n\} \in \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a).$$

Wir zeigen also $d \subseteq \mathrm{pcf}(B)$:
Ist $\delta \in d$, so gibt es einen Ultrafilter D auf a mit $b_\delta \cap B \in D$ und $\mathcal{J}_{<\delta}(a) \cap D = \emptyset$. Damit ist $\mathrm{cf}(\prod a/D) = \delta$ und $b_{\sigma_j} \in D$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$. Also ist

$$\delta = \mathrm{cf}(\prod b_{\sigma_j}/(D \cap \mathcal{P}(b_{\sigma_j}))) \in \mathrm{pcf}(B). \qquad \blacksquare$$

Ist b eine Menge von reguläre Kardinalzahlen, so definieren wir

$$\mathcal{J}_*(b) := \{c \subseteq b : \varrho = \sup(\varrho \cap c) \implies \varrho \text{ nicht regulär}\}.$$

Man beachte, daß insbesondere jede (schwach) progressive Teilmenge von b ein Element von $\mathcal{J}_*(b)$ ist und daß $\mathcal{J}_*(c) = \mathcal{J}_*(b) \cap \mathcal{P}(c)$ für alle $c \subseteq b$ gilt.

Lemma 7.18. *Ist b eine Menge von regulären Kardinalzahlen, so ist $\mathcal{J}_*(b)$ die kleinste Teilmenge J von $\mathcal{P}(b)$ mit:*

(i) *$\{\delta\} \in J$ für alle $\delta \in b$.*

(ii) *Ist κ eine Kardinalzahl, $\{c_i : i < \kappa\}$ eine Teilmenge von J mit $\kappa < \min c_i$ für alle $i < \kappa$, so ist $\bigcup\{c_i : i < \kappa\} \in J$.*

Beweis. Sicher hat $\mathcal{J}_*(b)$ die Eigenschaft (i). Sei nun $\{c_i : i < \kappa\}$ eine Teilmenge von $\mathcal{J}_*(b)$ wie in (ii) und $c := \bigcup\{c_i : i < \kappa\}$. Angenommen, ϱ ist regulär mit

$$\varrho = \sup(\varrho \cap c) = \sup \bigcup\{\varrho \cap c_i : i < \kappa\} = \sup\{\sup(\varrho \cap c_i) : i < \kappa\}.$$

Nach Voraussetzung ist $\sup(\varrho \cap c_i) < \varrho$ für alle $i < \kappa$, also $\varrho = \mathrm{cf}(\varrho) \leq \kappa$. Dies widerspricht aber $\kappa < \min c$.
Nun sei $J \subseteq \mathcal{P}(b)$ beliebig mit (i) und (ii). Wir zeigen $\mathcal{J}_*(b) \subseteq J$: Man beachte zunächst, daß (ii) impliziert, daß J abgeschlossen gegen endliche Vereinigungen ist. Sei $c \in \mathcal{J}_*(b)$. Wir zeigen $c \in J$ durch transfinite Induktion über

$$\nu := \sup\{\mu^+ : \mu \in c\}.$$

Ist $\nu = 0$, so ist $c = \emptyset$, also $c \in J$ nach (i) und (ii) mit $\kappa = 0$. Ist $\nu = \kappa^+$ für ein κ, so ist $\kappa = \max c$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $c \setminus \{\kappa\} \in J$. Wegen $\{\kappa\} \in J$ folgt $c \in J$. Ist ν Limeskardinalzahl, so ist $\nu = \sup c$. Nach Definition von $\mathcal{J}_*(b)$ ist ν singulär. Sei $\kappa := \mathrm{cf}(\nu)$ und $(\nu_i : i < \kappa)$ kofinal in ν mit $\kappa < \nu_0$. Nach Induktionsvoraussetzung sind $c \cap \nu_0$ und $c \cap [\nu_i, \nu_{i+1})_{\mathrm{ON}}$ für $i < \kappa$ Elemente von J. Nach (ii) folgt

$$c \cap [\nu_0, \nu)_{\mathrm{ON}} = \bigcup\{c \cap [\nu_i, \nu_{i+1})_{\mathrm{ON}} : i < \kappa\} \in J$$

und damit $c \in J$. ■

Diese Charakterisierung von $\mathcal{J}_*(b)$ erlaubt es uns, das folgende wichtige Resultat zu beweisen:

Lemma 7.19. *Ist $g \in \prod \mathrm{pcf}(a)$ und $b \in \mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a))$, so gibt es ein $f \in \prod a$ mit $g \restriction b \leq f^* \restriction b$.*

Beweis. Wir definieren

$$J := \{b \subseteq \mathrm{pcf}(a) : \exists f \in \prod a \quad g \restriction b \leq f^* \restriction b\}$$

und zeigen mit Hilfe von Lemma 7.18, daß $\mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a)) \subseteq J$ gilt:
Sei zunächst $\delta \in \mathrm{pcf}(a)$ und $\beta < \delta$. Um (i) zu zeigen, müssen wir ein $f \in \prod a$ mit $\beta \leq f^*(\delta)$ finden: Ist $\delta \in a$, so wähle man ein $f \in \prod a$ mit $f(\delta) = \beta$. Ist $\delta \in \mathrm{pcf}(a) \setminus a$, so setze man $f := f^\delta_\beta$.
Nun beweisen wir (ii): Sei κ eine Kardinalzahl und $\{c_i : i < \kappa\}$ eine Teilmenge von J mit $\kappa < \min c_i$ für alle $i < \kappa$. Für alle $i < \kappa$ sei $f_i \in \prod a$ mit $g \restriction c_i \leq f_i^* \restriction c_i$. Da $\prod a/\mathcal{J}_{<\kappa^+}(a)$ κ^+-gerichtet ist, gibt es ein $f \in \prod a$ mit $f_i \leq_{\mathcal{J}_{<\kappa^+}(a)} f$ für alle $i < \kappa$. O.B.d.A. können wir $g \restriction a \leq f$ annehmen. (Sonst ersetzen wir f durch $\max\{f, g \restriction a\}$.) Wir zeigen $g \restriction c \leq f^* \restriction c$ für $c := \bigcup\{c_i : i < \kappa\}$.
Sei $\delta \in c$. Ist $\delta \in a$, so ist $g(\delta) \leq f(\delta)$ nach Wahl von f. Ist $\delta \notin a$, so wählen wir ein $i < \kappa$ mit $\delta \in c_i$. Wegen $\kappa < \delta$ ist $f_i \leq_{\mathcal{J}_{<\delta}(a)} f$ und damit $g(\delta) \leq f_i^*(\delta) \leq f^*(\delta)$. ■

Wir beweisen nun eine Reihe von Resultaten über die Ideale $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$ und geben in Klammern jeweils an, welches Ergebnis aus den vorherigen Kapiteln wir damit verallgemeinern. Die ersten beiden Resultate entsprechen 3.4(3) in [Sh6] bzw. 3.2 in [Sh5, VIII].

Satz 7.20 (4.5). *Ist* $\lambda \leq \max\ \mathrm{pcf}(a)$ *eine Kardinalzahl und* $b \in \mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a)) \setminus \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$*, so ist* $\prod \mathrm{pcf}(a)/(\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) \restriction b)$ λ*-gerichtet.*

Beweis. Sei S eine Teilmenge von $\prod \mathrm{pcf}(a)$ mit $|S| < \lambda$. Mit Lemma 7.19 wählen wir für alle $g \in S$ ein $f_g \in \prod a$ mit $g \restriction b \leq f_g^* \restriction b$. Da $\prod a/\mathcal{J}_{<\lambda}(a)$ λ-gerichtet ist, gibt es ein $f \in \prod a$ mit $f_g \leq_{\mathcal{J}_{<\lambda}(a)} f$ für alle $g \in S$. Nach Lemma 7.17 ist $f_g^* \leq_{\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)} f^*$, also $g \leq_{\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) \restriction b} f^*$ für alle $g \in S$. ■

Satz 7.21. *Ist* $\lambda = \max\ \mathrm{pcf}(a)$ *und* $b \in \mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a)) \setminus \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$*, so ist*

$$\mathrm{tcf}(\prod \mathrm{pcf}(a)/(\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) \restriction b)) = \lambda.$$

Beweis. Für $\alpha < \lambda$ setzen wir $h_\alpha := (f^\lambda_\alpha)^*$. (Man erinnere sich an die fest gewählte Folge von Seite 74. Es ist hier speziell $b_\lambda = a$.) Nach Lemma 7.17 steigt die Folge $(h_\alpha : \alpha < \lambda)$ monoton modulo $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$.

Sei nun $g \in \prod \operatorname{pcf}(a)$ beliebig. Nach Lemma 7.19 gibt es ein $f \in \prod a$ mit

$$(g+1) \restriction b \leq f^* \restriction b.$$

Dazu wählen wir ein $\alpha < \lambda$ mit $f \leq f^\lambda_\alpha$. Nach Lemma 7.16 ist $f^* \leq h_\alpha$, also $g \restriction b < h_\alpha \restriction b$.

Wir definieren nun rekursiv eine Normalfolge $(\alpha_i : i < \lambda)$ in λ: $\alpha_0 < \lambda$ sei beliebig, und für Limeszahlen $i < \lambda$ sei $\alpha_i := \sup\{\alpha_j : j < i\}$. Für $i < \lambda$ wählen wir ein $\alpha_{i+1} < \lambda$ mit $h_{\alpha_i} \restriction b < h_{\alpha_{i+1}} \restriction b$. (Sicher ist dann $\alpha_i < \alpha_{i+1}$.) Nach Konstruktion ist $(h_{\alpha_i} : i < \lambda)$ modulo $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) \restriction b$ kofinal in $\prod \operatorname{pcf}(a)$. ■

Korollar 7.22 (4.19). *Ist* $\lambda \in \operatorname{pcf}(a)$ *und* $b \in \mathcal{J}_*(\operatorname{pcf}(a))$ *mit* $b \in \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda^+}(a) \setminus \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$*, so ist*

$$\operatorname{tcf}(\prod \operatorname{pcf}(a)/(\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) \restriction b)) = \lambda.$$

Beweis. O.B.d.A. sei $b \subseteq \operatorname{pcf}(b_\lambda)$. (Es ist $b \setminus \operatorname{pcf}(b_\lambda) \in \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$; b und $b \cap \operatorname{pcf}(b_\lambda)$ erzeugen also dasselbe Ideal über $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$.) Wenden wir Satz 7.21 mit b_λ statt a an, so folgt

$$\operatorname{tcf}(\prod \operatorname{pcf}(b_\lambda)/(\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(b_\lambda) \restriction b)) = \lambda.$$

Wir wählen nun eine Folge der Länge λ, die kofinal im Produkt $\prod \operatorname{pcf}(b_\lambda)$ modulo $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(b_\lambda) \restriction b$ ist und setzen die einzelnen Ordinalfunktionen beliebig auf $\operatorname{pcf}(a)$ fort. Nach Lemma 7.15 ist die resultierende Folge kofinal modulo $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) \restriction b$. ■

Korollar 7.23. *Ist* D *ein Ultrafilter auf* $\operatorname{pcf}(a)$ *mit* $D \cap \mathcal{J}_*(\operatorname{pcf}(a)) \neq \emptyset$*, so gilt*

$$\begin{aligned}\operatorname{cf}(\prod \operatorname{pcf}(a)/D) &= \min\{\lambda \in \operatorname{pcf}(a) : D \cap \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda^+}(a) \neq \emptyset\} \\ &= \min\{\lambda \in \operatorname{pcf}(a) : \operatorname{pcf}(b_\lambda) \in D\}.\end{aligned}$$

Beweis. [Sh5, VIII 3.3(1)] Sicher gibt es ein minimales $\lambda \in \operatorname{pcf}(a)$ mit $D \cap \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda^+}(a) \neq \emptyset$ (da $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\kappa}(a) = \mathcal{P}(\operatorname{pcf}(a))$ für $\kappa > \max \operatorname{pcf}(a)$ gilt).

Sei $d \in D \cap \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda^+}(a)$ und o.B.d.A. $d \in \mathcal{J}_*(\operatorname{pcf}(a))$, und seien $\mu_1, \ldots, \mu_n \leq \lambda$ Elemente von $\operatorname{pcf}(a)$ mit $d \subseteq \bigcup\{\operatorname{pcf}(b_{\mu_i}) : 1 \leq i \leq n\}$. Dann gibt es ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\operatorname{pcf}(b_{\mu_k}) \in D$. Wegen der Minimalität von λ muß $\mu_k = \lambda$ sein. Damit folgt sofort die zweite Gleichheit.

Nach Korollar 7.22 gilt außerdem

$$\operatorname{cf}(\prod \operatorname{pcf}(a)/D) = \operatorname{tcf}(\prod \operatorname{pcf}(a)/(\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) \restriction d)) = \lambda. \quad ■$$

Korollar 7.24 (4.12). *Ist D ein Ultrafilter auf* $\mathrm{pcf}(a)$ *mit* $D \cap \mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a)) \neq \emptyset$ *und λ eine Kardinalzahl, so gilt*

$$\mathrm{cf}(\prod \mathrm{pcf}(a)/D) < \lambda \iff D \cap \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) \neq \emptyset.$$

Beweis. Es ist $D \cap \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $D \cap \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\kappa^+}(a) \neq \emptyset$ für ein $\kappa < \lambda$ ist. Dies ist äquivalent zu $\mathrm{cf}(\prod \mathrm{pcf}(a)/D) \leq \kappa$. ■

Korollar 7.25. *Für alle Kardinalzahlen λ gilt*

$$\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) \cap \mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a)) = \{b \in \mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a)) : \mathrm{pcf}(b) \subseteq \lambda\}.$$

Beweis. Wir wenden Korollar 7.24 an: Sei $b \in \mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a))$. Es ist $b \in \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$ genau dann, wenn es keinen Ultrafilter D auf $\mathrm{pcf}(a)$ mit $b \in D$ und $D \cap \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) = \emptyset$ gibt. ■

Korollar 7.26. *Ist* $b \in \mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a))$ *und λ eine Kardinalzahl, so ist*

$$\mathcal{J}_{<\lambda}(b) = \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) \cap \mathcal{P}(b).$$

Bemerkung. Insbesondere ist also $\mathcal{J}_{<\lambda}(a) = \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) \cap \mathcal{P}(a)$.

Korollar 7.27 (4.21). *Ist* $b \in \mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a))$, *so ist* $\mathrm{pcf}(b)$ *eine Teilmenge von* $\mathrm{pcf}(a)$, *die ein Maximum besitzt.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt sofort aus Korollar 7.23. Angenommen, es ist $\lambda := \sup \mathrm{pcf}(b) \notin \mathrm{pcf}(b)$. Mit Korollar 7.25 folgt $b \in \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$, also $b \in \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\mu}(a)$ für ein $\mu < \lambda$ (da λ Limeskardinalzahl ist) und damit der Widerspruch $\mathrm{pcf}(b) \subseteq \mu$. ■

Lemma 7.28. *Sei* $c \in \mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a))$ *und* $b \subseteq \mathrm{pcf}(c)$ *progressiv. Ist D ein Ultrafilter auf b und D_β für $\beta \in b$ ein Ultrafilter auf c mit* $\beta = \mathrm{cf}(\prod c/D_\beta)$, *so ist*

$$D^* := \{A \subseteq c : \{\beta \in b : A \in D_\beta\} \in D\}$$

ein Ultrafilter auf c mit $\mathrm{cf}(\prod c/D^*) = \mathrm{cf}(\prod b/D)$.

Beweis. Man rechnet leicht nach, daß D^* ein Ultrafilter auf c ist. Für $\beta \in b$ sei $(g^\beta_\alpha : \alpha < \beta)$ eine Folge in $\prod c$, die kofinal modulo D_β ist. Wir definieren $G : \prod c \longrightarrow \prod b$ durch

$$G(f)(\beta) := \min\{\alpha < \beta : f \leq_{D_\beta} g^\beta_\alpha\}$$

für $f \in \prod c$ und $\beta \in b$.
Wir zeigen, daß G die Voraussetzungen von Lemma 3.16 erfüllt: Sei $h \in \prod b$. Da b progressiv ist, ist $c \notin \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<|b|^+}(a)$. (Sonst ist $\mathrm{pcf}(c) \subseteq |b|^+$ nach Korollar 7.25 und damit $b = \emptyset$.) Nach Satz 7.20 gibt es ein $p \in \prod c$ mit

$$g^{\beta}_{h(\beta)} <_{(\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<|b|^+}(a) \cap \mathcal{P}(c))} p$$

für alle $\beta \in b$. Ist $\beta \in b$, so ist $|b|^+ \leq \beta = \mathrm{cf}(\prod c/D_\beta)$, also $D_\beta \cap \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<|b|^+}(a) = \emptyset$ nach Korollar 7.24. (Offenbar ist es kein Problem, D_β auf $\mathrm{pcf}(a)$ zu erweitern, um dieses Korollar anwenden zu können.) Es folgt $g^{\beta}_{h(\beta)} <_{D_\beta} p$. Damit haben wir $h < G(p)$ nach Definition von G.
Sei nun $q \in \prod c$ mit $p \leq_{D^*} q$. Dann ist $\mathrm{B}[p,q] \in D^*$, also $\mathrm{B}[p,q] \in D_\beta$ bzw. $p \leq_{D_\beta} q$ für fast alle $\beta \in b$ modulo D. Nach Definition von G folgt somit $G(p) \leq_D G(q)$. ■

Korollar 7.29. *Ist $c \in \mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a))$ und $b \subseteq \mathrm{pcf}(c)$ progressiv, so ist $\mathrm{pcf}(b)$ eine Teilmenge von $\mathrm{pcf}(c)$.*

Bemerkung. Dies ist eine Verallgemeinerung des Resultates [Sh5, I 1.12]. Man beachte, daß der dort bewiesene Spezialfall aus unserem Korollar folgt, wenn man $c = a$ setzt. Außerdem folgt mit Lemma 7.2 sofort, daß die obige Aussage auch für schwach progressive b gilt.

Lemma 7.30 (4.26). *Ist $c \in \mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a))$ und $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$, so ist*

$$\lambda \notin \mathrm{pcf}(c \setminus \mathrm{pcf}(b_\lambda)).$$

Beweis. Ist $c \in \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda^+}(a)$, so ist $c \setminus \mathrm{pcf}(b_\lambda) \in \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$ und die Behauptung folgt mit Korollar 7.25. Sei also $c \notin \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda^+}(a)$. Damit ist $c' := c \setminus \mathrm{pcf}(b_\lambda) \notin \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$.
Gilt das Lemma nicht, so gibt es einen Ultrafilter D auf $\mathrm{pcf}(a)$ mit $c' \in D$ und $\mathrm{cf}(\prod \mathrm{pcf}(a)/D) = \lambda$, also $D \cap \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) = \emptyset$. Sei $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ kofinal in $\prod \mathrm{pcf}(a)$ modulo D. Da $\prod \mathrm{pcf}(a)/(\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda^+}(a) \restriction c)$ λ^+-gerichtet ist, gibt es ein $f \in \prod \mathrm{pcf}(a)$ mit

$$f_\alpha \leq_{(\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda^+}(a) \restriction c)} f$$

für alle $\alpha < \lambda$. Damit ist aber

$$\mathrm{B}(f, f_\alpha) \cap c' = (\mathrm{B}(f, f_\alpha) \cap c) \setminus \mathrm{pcf}(b_\lambda) \in \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$$

für alle $\alpha < \lambda$, d.h. f ist obere Schranke von $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ modulo $\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) \restriction c'$ und damit modulo D. ■

Wir setzen nun

$$\mathrm{pcf}_*(b) := \{\mathrm{cf}(\prod b/D) : D \text{ Ultrafilter auf } b \wedge D \cap \mathcal{J}_*(b) \neq \emptyset\}$$

für Mengen b von regulären Kardinalzahlen und geben zunächst einige Eigenschaften an, die sofort aus der Definition folgen:

Lemma 7.31 (4.3). *Sind b und c Mengen von regulären Kardinalzahlen, so gilt:*

(i) $\mathrm{pcf}_*(b) = \bigcup\{\mathrm{pcf}(d) : d \in \mathcal{J}_*(b)\}$

(ii) *Ist $b \in \mathcal{J}_*(b)$, so ist* $\mathrm{pcf}_*(b) = \mathrm{pcf}(b)$.

(iii) $\mathrm{pcf}_*(b)$ *ist eine Menge von regulären Kardinalzahlen.*

(iv) $b \subseteq \mathrm{pcf}_*(b)$

(v) $\mathrm{pcf}_*(b) \cap \min b = \emptyset$

(vi) $b \subseteq c \implies \mathrm{pcf}_*(b) \subseteq \mathrm{pcf}_*(c)$

(vii) $\mathrm{pcf}_*(b \cup c) = \mathrm{pcf}_*(b) \cup \mathrm{pcf}_*(c)$

Bemerkung. Man beachte, daß die Bedingung aus (ii) insbesondere für (schwach) progressive b erfüllt ist.

Der folgende Satz, der [Sh5, VIII 3.4] entspricht, wird später gleichzeitig ein Ersatz für [BM, 6.10] sein. (Die Definition von J im Originalbeweis in [Sh5] ist überflüssig.)

Satz 7.32 (Lokalisierungssatz). *Ist $c \subseteq \mathrm{pcf}(a)$ und $\lambda \in \mathrm{pcf}_*(c)$, so gibt es ein $d \subseteq c$ mit $|d| \leq |a|$ und $\lambda \in \mathrm{pcf}(d)$.*

Beweis. Sonst gibt es ein $c \in \mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a))$ und ein $\lambda \in \mathrm{pcf}(c)$, so daß $\lambda \notin \mathrm{pcf}(d)$ für alle $d \in [c]^{\leq |a|}$ ist. Wir wählen ein minimales λ mit dieser Eigenschaft und dazu ein $c \in \mathcal{J}_*(\mathrm{pcf}(a))$ mit

$$\lambda \in \mathrm{pcf}(c) \setminus \bigcup\{\mathrm{pcf}(d) : d \subseteq c \wedge |d| \leq |a|\},$$

so daß

$$\chi := \sup\{\mu^+ : \mu \in \mathrm{pcf}(c) \wedge \mu < \max\ \mathrm{pcf}(c)\}$$

minimal wird. Nach Lemma 7.30 ist $\lambda \in \mathrm{pcf}(c \cap \mathrm{pcf}(b_\lambda))$, o.B.d.A. daher $c \subseteq \mathrm{pcf}(b_\lambda)$. Nach Korollar 7.25 ist somit $\lambda = \max\ \mathrm{pcf}(c)$.
Angenommen, es existiert $\mu := \max(\lambda \cap \mathrm{pcf}(c))$, also $\chi = \mu^+$. Es ist wie oben $\mu \notin \mathrm{pcf}(c \setminus \mathrm{pcf}(b_\mu))$. Wegen Korollar 7.25 ist $\mathrm{pcf}(c \cap \mathrm{pcf}(b_\mu)) \subseteq \mu + 1$, also $\lambda \in \mathrm{pcf}(c \setminus \mathrm{pcf}(b_\mu))$. Damit widerspricht $c \setminus \mathrm{pcf}(b_\mu)$ der minimalen Wahl von χ.
Somit ist $\chi = \sup(\lambda \cap \mathrm{pcf}(c))$ Limeskardinalzahl mit $\chi \notin \lambda \cap \mathrm{pcf}(c)$.
Wenn wir jetzt noch zeigen, daß $\mathrm{pcf}(d) \subseteq \chi$ für alle $d \subseteq \lambda \cap \mathrm{pcf}(c)$ mit $|d| \leq |a|$ gilt, so sind wir fertig, denn dann können wir rekursiv eine Folge $(\chi_i : i < |a|^+)$ von Elementen von $\lambda \cap \mathrm{pcf}(c)$ konstruieren, die Satz 6.5 widerspricht.
Angenommen, es gibt eine Menge $d \subseteq \lambda \cap \mathrm{pcf}(c)$ mit $|d| \leq |a|$ und

$$\chi^* := \max\ \mathrm{pcf}(d) \geq \chi.$$

Es ist $\mathrm{pcf}(d) \subseteq \mathrm{pcf}(c)$ nach Korollar 7.29, also $\chi^* = \lambda$. Für alle $\delta \in d$ gibt es nach minimaler Wahl von λ eine Menge $e_\delta \subseteq c$ mit $\delta \in \mathrm{pcf}(e_\delta)$ und $|e_\delta| \leq |a|$. Mit $e := \bigcup\{e_\delta : \delta \in d\}$ ist dann $d \subseteq \mathrm{pcf}(e)$, also wieder $\mathrm{pcf}(d) \subseteq \mathrm{pcf}(e)$ nach Korollar 7.29. Insbesondere folgt $\lambda \in \mathrm{pcf}(e)$ im Widerspruch zu $|e| \leq |a|$. ■

Lemma 7.33. $\mathrm{pcf}(a) = \mathrm{pcf}_*(\mathrm{pcf}(a))$

Beweis. Dies gilt nach Korollar 7.27. ■

Satz 7.34. *Ist* $b \subseteq \mathrm{pcf}(a)$, *so ist* $\mathrm{pcf}_*(b) = \mathrm{pcf}_*(\mathrm{pcf}_*(b))$.

Beweis. [Sh5, VIII 3.5] Sei $\lambda \in \mathrm{pcf}_*(\mathrm{pcf}_*(b))$. Nach Lemma 7.33 ist $\mathrm{pcf}_*(b) \subseteq \mathrm{pcf}_*(\mathrm{pcf}(a)) = \mathrm{pcf}(a)$, und damit nach Satz 7.32 $\lambda \in \mathrm{pcf}(c_1)$ für ein $c_1 \subseteq \mathrm{pcf}_*(b)$ mit $|c_1| \leq |a|$.
Ist $\mu \in c_1 \subseteq \mathrm{pcf}_*(b)$, so gibt es nach Satz 7.32 analog eine Menge $d_\mu \subseteq b$ mit $|d_\mu| \leq |a|$ und $\mu \in \mathrm{pcf}(d_\mu)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{pcf}(c_1) = \mathrm{pcf}_*(c_1) &\subseteq \mathrm{pcf}_*(\bigcup\{\mathrm{pcf}(d_\mu) : \mu \in c_1\}) \\ &\subseteq \mathrm{pcf}_*(\mathrm{pcf}(\bigcup\{d_\mu : \mu \in c_1\})) = \mathrm{pcf}(\bigcup\{d_\mu : \mu \in c_1\}) \subseteq \mathrm{pcf}_*(b).\end{aligned}$$

Die letzten beiden Schritte dieser Inklusionskette gelten nach Lemma 7.33, weil $|\bigcup\{d_\mu : \mu \in c_1\}| \leq |a|$ und damit $\bigcup\{d_\mu : \mu \in c_1\}$ progressiv ist. ■

Wir können nun noch eine bessere Analogie zu Lemma 4.21 als Korollar 7.27 angeben:

Lemma 7.35. *Ist $b \subseteq \mathrm{pcf}(a)$, so ist $\mathrm{pcf}_*(b)$ eine Teilmenge von $\mathrm{pcf}(a)$, die ein Maximum besitzt.*

Beweis. Der erste Teil der Aussage folgt mit Korollar 7.27. Angenommen, $\mathrm{pcf}_*(b)$ besitzt kein Maximum. Wir zeigen, daß dann für alle $c \subseteq \mathrm{pcf}_*(b)$ mit $|c| \leq |a|$ ein $\lambda \in \mathrm{pcf}_*(b)$ mit $\max \mathrm{pcf}(c) < \lambda$ existiert. Damit können wir eine Folge der Länge $|a|^+$ von Elementen von $\mathrm{pcf}_*(b)$ konstruieren, die Satz 6.5 widerspricht.
Sei also $c \subseteq \mathrm{pcf}_*(b)$ mit $|c| \leq |a|$. Wegen der Progressivität von c und nach Satz 7.34 gilt

$$\mathrm{pcf}(c) = \mathrm{pcf}_*(c) \subseteq \mathrm{pcf}_*(\mathrm{pcf}_*(b)) = \mathrm{pcf}_*(b).$$

Außerdem besitzt $\mathrm{pcf}(c)$ ein Maximum nach Lemma 4.21. Nach unserer Annahme finden wir ein $\lambda \in \mathrm{pcf}_*(b)$, das größer als dieses Maximum ist. ■

Korollar 7.36 (4.24). *Für alle $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$ ist $\max \mathrm{pcf}_*(\mathrm{pcf}(b_\lambda)) = \lambda$.*

Beweis. Da b_λ als Teilmenge von a progressiv ist, gilt sogar

$$\mathrm{pcf}_*(\mathrm{pcf}(b_\lambda)) = \mathrm{pcf}_*(\mathrm{pcf}_*(b_\lambda)) = \mathrm{pcf}_*(b_\lambda) = \mathrm{pcf}(b_\lambda). \qquad ■$$

Lemma 7.37 (4.27). *Ist $c \subseteq \mathrm{pcf}(a)$, so gibt es ein $n \in \omega$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathrm{pcf}_*(c)$ mit*

(i) $\max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \max\ \mathrm{pcf}_*(c)$

(ii) $c \subseteq \mathrm{pcf}(b_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup \mathrm{pcf}(b_{\lambda_n})$

Beweis. Sei $c_0 := c$. Für $n < \omega$ definieren wir rekursiv

$$c_{n+1} := \begin{cases} c_n \setminus \mathrm{pcf}(b_{\max\ \mathrm{pcf}_*(c_n)}) & c_n \neq \emptyset \\ \emptyset & c_n = \emptyset. \end{cases}$$

Nach Lemma 7.30 ist $\max\ \mathrm{pcf}_*(c_{n+1}) < \max\ \mathrm{pcf}_*(c_n)$, falls $c_{n+1} \neq \emptyset$ ist. Daher muß es ein (minimales) $n < \omega$ mit $c_n = \emptyset$ geben. Wir setzen dann $\lambda_{i+1} := \max\ \mathrm{pcf}_*(c_i)$ für $i < n$. ■

Korollar 7.38 (4.7). *Für jede Kardinalzahl λ gilt:*

$$\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) = \{c \subseteq \mathrm{pcf}(a) : \mathrm{pcf}_*(c) \subseteq \lambda\}.$$

Beweis. Ist $\mathrm{pcf}_*(c) \subseteq \lambda$, so gibt es nach Lemma 7.37 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n < \lambda$ mit $c \subseteq \mathrm{pcf}(b_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup \mathrm{pcf}(b_{\lambda_n})$, also $c \in \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$.
Ist umgekehrt $c \in \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a)$, so ist $c \subseteq \mathrm{pcf}(b_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup \mathrm{pcf}(b_{\lambda_n})$ für gewisse $\lambda_1, \ldots, \lambda_n < \lambda$. Es folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{pcf}_*(c) &\subseteq \mathrm{pcf}_*(\mathrm{pcf}(b_{\lambda_1})) \cup \cdots \cup \mathrm{pcf}_*(\mathrm{pcf}(b_{\lambda_n}))\\ &\subseteq \mathrm{pcf}(b_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup \mathrm{pcf}(b_{\lambda_n}) \subseteq \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} + 1 \subseteq \lambda.\end{aligned}$$ ■

Korollar 7.39 (4.8). *Ist λ eine Kardinalzahl und $b \subseteq a$, so ist*

$$\mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(b) = \mathcal{J}^{\mathrm{pcf}}_{<\lambda}(a) \cap \mathcal{P}(\mathrm{pcf}(b)).$$

Bemerkung. Es sei hier noch kurz erwähnt, daß alle Aussagen in diesem Abschnitt auch dann noch gültig sind, wenn man nur fordert, daß a *schwach* progressiv ist. Wir verzichten auf die Angabe der relativ einfachen Beweise.

7.3 Intervalle in $\mathrm{pcf}(a)$

Wir nennen ein Ideal I auf einer Limesordinalzahl λ **schwach normal**, wenn für jede I-positive Menge S und jede regressive Funktion f auf S eine I-positive Menge $S_0 \subseteq S$ und ein $\gamma < \lambda$ mit $f[S_0] \subseteq \gamma$ existieren. Ist C eine Teilmenge von λ mit $\sup C = \lambda$, so setzen wir

$$\mathrm{I}_d(C) := \{b \subseteq C : b \text{ ist nicht stationär in } \lambda\}.$$

Lemma 7.40. *Ist* $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$ *und C ein Club in λ vom Ordnungstyp* $\mathrm{cf}(\lambda)$*, so ist* $\mathrm{I}_d(C)$ *ein schwach normales Ideal auf λ.*

Beweis. Wegen $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$ ist $\mathrm{I}_d(C)$ sicher ein Ideal auf λ. Sei Γ der $\in$-Isomorphismus von $\kappa := \mathrm{cf}(\lambda)$ auf C. Sei S $\mathrm{I}_d(C)$-positive Teilmenge von C und f regressiv auf S. Die Menge

$$S' := \Gamma^{-1}[S] \cap \{i < \kappa : i \text{ Limesordinalzahl}\}$$

ist dann sicher eine stationäre Teilmenge von κ. Für $i \in S'$ sei $g(i)$ das eindeutig bestimmte $j < \kappa$ mit $f(\Gamma(i)) \in [\Gamma(j), \Gamma(j+1))_{\mathrm{ON}}$. Da alle $i \in S'$ Limeszahlen sind und f regressiv ist, ist g ebenfalls regressiv. Nach dem Satz von Fodor ([Je1, Theorem 22]) gibt es eine stationäre Teilmenge $S'_0 \subseteq S'$ und ein $i < \kappa$ mit $g[S'_0] = \{i\}$. $S_0 := \Gamma[S'_0]$ ist dann $\mathrm{I}_d(C)$-positive Teilmenge von C, und es gilt $f[S_0] \subseteq \Gamma(i+1) \in \lambda$. ■

Lemma 7.41. *Ist I ein schwach normales Ideal auf einer Kardinalzahl λ und X I-positiv, so ist $I \restriction X$ ebenfalls schwach normal.*

Beweis. Sei Y $(I \restriction X)$-positiv und f regressiv auf Y. Dann ist f insbesondere regressiv auf der I-positiven Menge $Y \cap X$, auf einer I-positiven Menge $Z \subseteq Y \cap X$ gilt also $f[Z] \subseteq \gamma$ für ein $\gamma < \lambda$. Es ist $Z \cap X = Z \notin I$, also Z $(I \restriction X)$-positiv. ■

Der folgende Satz ersetzt [BM, 6.3]. Mit der Methode der γ-rapiden Folgen können wir hier einen sehr kurzen Beweis angeben. (Die allgemeine Form mit C_0^{+n} statt C_0^+ beweist man analog; sie wird jedoch wie in [BM] nicht benötigt.)

Satz 7.42. *Sei λ eine singuläre Kardinalzahl mit überabzählbarer Kofinalität. Dann gibt es einen Club C_0 von Kardinalzahlen in λ mit*

$$\max\ \mathrm{pcf}(C_0^+) = \lambda^+.$$

Beweis. Sei C ein Club von singulären Kardinalzahlen in λ mit $\min C > |C|$ und $\mathrm{otp}(C) = \mathrm{cf}(\lambda)$. Wir setzen $a := C^+$. Da a offenbar progressive Menge von regulären Kardinalzahlen ist, gibt es nach Satz 4.23 eine Menge $b_{\lambda^+} \subseteq a$, die $\mathcal{J}_{<\lambda^{++}}(a)$ über $\mathcal{J}_{<\lambda^+}(a)$ erzeugt. Nach Lemma 4.24 reicht es zu zeigen, daß es einen Club $C_0 \subseteq C$ in λ mit $C_0^+ \subseteq b_{\lambda^+}$ gibt.
Angenommen, es gibt so einen Club nicht. Sei b die Teilmenge von C mit $b^+ = b_{\lambda^+}$. Nach Annahme ist $C \setminus b$ stationär, also

$$J := \mathrm{I}_d(C) \restriction (C \setminus b) = \mathrm{I}_d(C)[b]$$

ein schwach normales Ideal auf λ. Wir übertragen die Idealstruktur auf a, indem wir

$$I := \{X^+ : X \in J\}$$

setzen. Da $\mathrm{I}_d(C)$ alle beschränkten Teilmengen von C enthält, enthält I alle beschränkten Teilmengen von a; insbesondere ist also $\mathcal{J}_{<\lambda^+}(a) \subseteq I$ (nach Lemma 4.10 und Korollar 4.13, da λ singulär ist) und $\lambda = \lim_I a$. Wegen $b \in J$ ist $b_{\lambda^+} \in I$, also $\mathcal{J}_{<\lambda^{++}}(a) \subseteq I$ nach Wahl von b_{λ^+}.
Nach Lemma 3.24 gibt es eine modulo I streng monotone Folge der Länge λ^+ in $\prod a$, die γ-rapid für alle $\gamma \in [\aleph_1, \lambda)_{\mathrm{reg}}$ ist. Nach Lemma 3.21 und Lemma 3.23 besitzt diese Folge ein Supremum g. Da $\prod a/I$ λ^{++}-gerichtet ist, können wir $g \in \prod a$ annehmen. Ist $\varrho \in C$, so ist also $g(\varrho^+) < \varrho^+$, d.h. $\mathrm{cf}(g(\varrho^+)) < \varrho$, da ϱ singulär ist. Da J schwach normal ist, gibt es eine J-positive Menge $X \subseteq C$ und ein $\gamma < \lambda$ mit $\mathrm{cf}(g(\varrho^+)) < \gamma$ für alle $\varrho \in X$. Mit Lemma 3.22 folgt der Widerspruch

$$\lambda = \lim_I(\mathrm{cf} \circ g) \leq \lim_{(I \restriction X^+)}(\mathrm{cf} \circ g) \leq \gamma. \qquad \blacksquare$$

Bevor wir diesen Satz auf Intervalle in $\mathrm{pcf}(a)$ anwenden, wollen wir noch kurz darauf eingehen, daß wir auch einen Darstellungssatz gezeigt haben. (Dies ist das Ergebnis 5.5 aus [Sh4].)
Ist c eine Menge von Ordinalzahlen, so ist

$$\mathrm{I}_b(c) := \{b \subseteq c : \sup b < \sup c\}$$

bekanntlich ein Ideal auf c.

Satz 7.43. *Ist λ eine singuläre Kardinalzahl mit überabzählbarer Kofinalität, so gibt es einen Club C_0 von Kardinalzahlen in λ mit*

$$\mathrm{tcf}(\prod C_0^+ / \mathrm{I}_b(C_0^+)) = \lambda^+.$$

Beweis. Man wähle C_0 wie in Satz 7.42. O.B.d.A. sei C_0 progressiv. Nach Lemma 4.19 reicht es zu zeigen, daß $\mathcal{J}_{<\lambda^+}(C_0^+) \subseteq \mathrm{I}_b(C_0^+)$ ist. (Wir wenden das Lemma mit $a = b = C_0^+$ an.) Dies folgt sofort aus Lemma 4.10 und der Singularität von λ. $\blacksquare$

Sei κ eine Kardinalzahl und $\mu \in [\aleph_1, \mathrm{cf}(\kappa))_{\mathrm{reg}}$. Dann ist die Menge

$$\Sigma_{\kappa,\mu} := \{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \mu\}$$

bekanntlich eine stationäre Teilmenge von κ. Ist $T \subseteq \Sigma_{\kappa,\mu}$ stationär, so nennen wir $(C_\alpha : \alpha \in T)$ eine $\Diamond_{\mathrm{club}}$**-Folge für** T, wenn gilt:

- Für alle $\alpha \in T$ ist C_α Club in α vom Ordnungstyp μ.
- Für jeden Club C in κ ist $\{\alpha \in T : C_\alpha \subseteq C\}$ stationär in κ.

Wir zitieren 6.21 aus [BM]:

Lemma 7.44. *Sind κ und μ regulär mit $\omega < \mu$ und $\mu^+ < \kappa$, so gibt es für jede stationäre Teilmenge von $\Sigma_{\kappa,\mu}$ eine $\diamondsuit_{\text{club}}$-Folge.*

Dieses kombinatorische Resultat ermöglicht es uns, das folgende Lemma zu beweisen. Es handelt sich hierbei um eine Verallgemeinerung von [Je2, 6.3]. (Die Formulierung dort ist nicht ganz richtig, da die Bedingung (ii) vergessen wurde.) Der Beweis erfolgt analog.

Lemma 7.45. *Sei $\eta \geq \omega$ eine Kardinalzahl, $\varrho > \eta$ eine Ordinalzahl und F eine Abbildung von $\mathcal{P}(\varrho)$ in* ON *mit*

(i) $X \subseteq Y \subseteq \varrho \implies F(X) \leq F(Y)$

(ii) $X \subseteq \varrho \implies F(X) \geq \sup X$

(iii) *Ist $\gamma < \varrho$ mit $\operatorname{cf}(\gamma) = \eta^{+3}$, so gibt es einen Club D in γ mit $F(D) = \gamma$.*

(iv) *Ist X eine Teilmenge von ϱ vom Ordnungstyp η^+, so gibt es ein $\beta < \sup X$ mit $F(X \cap \beta) \geq \sup X$.*

Dann ist $\varrho < \eta^{+4}$.

Beweis. Angenommen, es gibt solch eine Abbildung F für ein $\varrho \geq \eta^{+4}$. Wir wählen eine $\diamondsuit_{\text{club}}$-Folge $\mathfrak{C} := (C_\alpha : \alpha \in \Sigma_{\eta^{+3},\eta^+})$ für $\Sigma_{\eta^{+3},\eta^+}$. Sei Θ regulär und groß genug gewählt. $(N_i : i \leq \eta^{+3})$ sei eine Approximationsfolge in $\mathrm{H}(\Theta)$ mit $|N_i| = \eta^{+3}$ für alle $i < \eta^{+3}$ und $\eta^{+3} \cup \{\mathfrak{C}, F\} \subseteq N_0$. Wir setzen $\gamma_i := \chi_{N_i}(\eta^{+4})$ für $i \leq \eta^{+3}$.
Nach Lemma 5.14 ist $(\gamma_i : i < \eta^{+3})$ eine in $\gamma_{\eta^{+3}}$ kofinale Normalfunktion und $\gamma_{\eta^{+3}} < \eta^{+4}$. Nach (iii) gibt es einen Club D in $\gamma_{\eta^{+3}}$ mit $F(D) = \gamma_{\eta^{+3}}$. O.B.d.A. sei $D = \{\gamma_i : i \in C\}$ für einen Club C in η^{+3}. (Anderenfalls dünnen wir D entsprechend aus und wenden (i) und (ii) an.) Nach Wahl von $\mathfrak{C}$ finden wir ein $\alpha \in \Sigma_{\eta^{+3},\eta^+}$ mit $C_\alpha \subseteq C$, und nach (iv) gibt es ein $\beta < \alpha$ mit

$$\zeta := F(\{\gamma_i : i \in C_\alpha \cap \beta\}) \geq \sup\{\gamma_i : i \in C_\alpha\} = \gamma_\alpha.$$

Wegen $\eta^{+3} \subseteq N_0$ und $\mathfrak{C} \in N_0$ ist α und damit auch C_α ein Element von N_0. Ferner ist $(N_i : i < \beta) \in N_{\beta+1} \subseteq N_\alpha$ (nach Definition des Begriffes „Approximationsfolge"). Insgesamt folgt $\{\gamma_i : i \in C_\alpha \cap \beta\} \in N_\alpha$ und damit $\zeta \in N_\alpha$ (wegen $F \in N_0$). Nach (i) ist $\zeta \leq F(D) = \gamma_{\eta^{+3}} < \eta^{+4}$. Damit folgt der Widerspruch $\zeta < \chi_{N_\alpha}(\eta^{+4}) = \gamma_\alpha$. ■

Wir können nun einen kurzen Beweis für eines der wichtigsten Resultate der pcf-Theorie angeben. Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung von [BM, 6.1]. Insbesondere wird die Bedingung $2^{|a|} < \min a$ hier durch die Progressivität von a ersetzt (s. Remark 7.12 in [BM]), und es werden keine speziellen Generatorenfolgen wie in [BM, 6.9] benötigt.

Satz 7.46. *Ist c ein Intervall von regulären Kardinalzahlen mit $c \subseteq \mathrm{pcf}(a)$, so ist $|c| \leq |a|^{+3}$.*

Beweis. Wenn die Behauptung nicht stimmt, gibt es ein Intervall $c \subseteq \mathrm{pcf}(a)$ von regulären Kardinalzahlen vom Ordnungstyp $|a|^{+4}$. Sicher ist a dann unendlich. O.B.d.A. können wir annehmen, daß c progressiv ist und nur Nachfolgerkardinalzahlen enthält. Um einen Widerspruch zu erhalten, werden wir eine Abbildung F wie in Lemma 7.45 für $\eta := |a|$ und $\varrho = \eta^{+4}$ konstruieren:
Γ sei der $\in$-Isomorphismus von ϱ auf c. Wir definieren

$$F(X) := \begin{cases} \Gamma^{-1}(\max\ \mathrm{pcf}(\Gamma[X])) & \mathrm{pcf}(\Gamma[X]) \subseteq c \\ \varrho & \text{sonst} \end{cases}$$

für $X \subseteq \varrho$.
Nach Lemma 4.3 hat F sicher die Eigenschaften (i) und (ii). Zum Beweis von (iii) sei $\gamma < \varrho$ mit $\mathrm{cf}(\gamma) = \eta^{+3}$. Sei λ die Kardinalzahl mit $\lambda^+ = \Gamma(\gamma)$. Dann ist λ Limeskardinalzahl und $\lambda = \sup \Gamma[\gamma]$. Damit ist $\mathrm{cf}(\lambda) = \mathrm{cf}(\gamma)$, insbesondere ist λ singulär. Nach Satz 7.42 gibt es einen Club C_0 von Kardinalzahlen in λ mit $\max \mathrm{pcf}(C_0^+) = \lambda^+$. $D := \Gamma^{-1}[C_0^+ \cap c]$ ist dann ein Club in γ mit $F(D) = \gamma$. (Nach Lemma 4.3 ist das Maximum von $\mathrm{pcf}(C_0^+ \cap c)$ nicht kleiner als λ. Es ist verschieden von λ, da λ singulär ist.)
Nun zeigen wir noch (iv): Sei X Teilmenge von ϱ vom Ordnungstyp η^+. Wie eben ist $\kappa := \max\ \mathrm{pcf}(\Gamma[X]) > \sup \Gamma[X]$. Da $\Gamma[X]$ progressiv ist, gibt es nach

Satz 7.32 eine Menge $d \subseteq \Gamma[X]$ mit $|d| \leq |a|$ und $\kappa \in \mathrm{pcf}(d)$. Da η^+ regulär ist, gibt es ein $\beta < \sup X$ mit $\Gamma^{-1}[d] \subseteq \beta$. Es folgt

$$F(X \cap \beta) \geq F(\Gamma^{-1}[d]) \geq \sup X. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung. In [HSW, Kap. 7] habe ich den Operator pcf^c definiert und die Ergebnisse aus [BM, 6] auf diesen Operator verallgemeinert. Man erhält dadurch auf progressiven Anfangsstücken c von $\mathrm{pcf}(a)$ einen topologischen Hüllenoperator, mit dem man den obigen Satz analog beweisen kann. Die hier vorgestellte Methode scheint mir jedoch noch etwas eleganter zu sein.

Wie versprochen gehen wir nun noch einmal auf Satz 3.25 ein:

Satz 7.47. *Ist a ein Intervall von regulären Kardinalzahlen, so ist auch* $\mathrm{pcf}(a)$ *ein Intervall von regulären Kardinalzahlen.*

Beweis. Sei $\lambda \in \mathrm{pcf}(a)$ und $\lambda' \in [\min a, \lambda)_{\mathrm{reg}}$. Wir müssen zeigen, daß λ' Element von $\mathrm{pcf}(a)$ ist:
O.B.d.A. sei a unendlich und $\lambda' > \sup a$. Wir wählen einen Ultrafilter D auf a mit $\mathrm{cf}(\prod a/D) = \lambda$. Es ist $\mu := \lim_D a > \min a$ (denn sonst wäre D der von $\{\min a\}$ erzeugte Hauptultrafilter) und damit auch $\mu > |a|$. Sicher ist außerdem $\mu \leq \sup a < \lambda'$. Nach Satz 3.25 gibt es eine Ordinalfunktion g auf a mit $g < \mathrm{id}_a$, $\lambda' = \mathrm{cf}(\prod g/D)$ und $\mu \leq \lim_D(\mathrm{cf} \circ g)$.
Damit ist $d := \{\delta \in a : \mathrm{cf}(g(\delta)) > \min(a)\} \in D$ und sicher $\mathrm{Wb}((\mathrm{cf} \circ g) \restriction d)$ eine Teilmenge von a. Mit Hilfe der Lemmata 3.17 und 4.1 folgt nun

$$\begin{aligned} \lambda' &= \mathrm{cf}(\prod g/D) = \mathrm{cf}(\prod (\mathrm{cf} \circ g)/D) = \mathrm{cf}(\prod (\mathrm{cf} \circ g) \restriction d/(D \cap \mathcal{P}(d))) \\ &\in \mathrm{pcf}(\mathrm{Wb}((\mathrm{cf} \circ g) \restriction d)) \subseteq \mathrm{pcf}(a). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Korollar 7.48. *Ist a ein Intervall von regulären Kardinalzahlen, so ist*

$$|\mathrm{pcf}(a)| \leq |a|^{+3}.$$

Bemerkung. Damit sind insbesondere alle pcf-Resultate bewiesen, um die wichtigsten Anwendungen auf die Kardinalzahlarithmetik zu beweisen, z.B.

- Ist δ eine Limesordinalzahl, so ist $\aleph_\delta^{\mathrm{cf}(\delta)} < \aleph_{(|\delta|^{\mathrm{cf}(\delta)})^+}$.
- $(\forall n < \omega\ 2^{\aleph_n} < \aleph_\omega) \implies 2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$

Beweise und weitere Resultate finden sich etwa in 8.1 und 8.2 von [HSW].

8 Anhang

Literatur

[BM] Maxim R. Burke, Menachem Magidor. Shelah's pcf theory and its applications. *Ann. Pure Appl. Logic* **50** (1990) 207–254.

[Dr] Frank R. Drake. Set Theory. An Introduction to Large Cardinals. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 76. (North Holland, Amsterdam, 1974).

[HSW] Michael Holz, Karsten Steffens, Edmund Weitz. Reduzierte Produkte regulärer Kardinalzahlen. (Universität Hannover, 1993).

[Je1] Thomas Jech. Set Theory. (Academic Press, New York, 1978).

[Je2] Thomas Jech. Shelah's theorem on $2^{\aleph_\omega}$. *Bull. London Math. Soc.* **24** (1992) 127–139.

[Je3] Thomas Jech. A variation on a theorem of Galvin and Hajnal. *Bull. London Math. Soc.* **25** (1993) 97–103.

[Ku] Kenneth Kunen. Set Theory. An Introduction to Independence Proofs. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 102. (North Holland, Amsterdam, 1980).

[Sh1] Saharon Shelah. Proper Forcing. Lecture Notes in Mathematics 940. (Springer, Berlin, 1982).

[Sh2] Saharon Shelah. Successors of singulars, cofinalities of reduced products of cardinals and productivity of chain conditions. *Israel J. Math.* **62** (1988) 213–256.

[Sh3] Saharon Shelah. Products of regular cardinals and cardinal invariants of products of Boolean algebras. *Israel J. Math.* **70** (1990) 129–187.

[Sh4] Saharon Shelah. Cardinal arithmetic for skeptics. *Bull. Am. Math. Soc.* **26** (1992) 197–210.

[Sh5] SAHARON SHELAH. Cardinal Arithmetic. Oxford Logic Guides 29. (Clarendon Press, Oxford, 1994).

[Sh6] SAHARON SHELAH. An answer to complains of E. Weitz on [Sh:371]. (The Hebrew University, Jerusalem, 1995). *(s. Anhang)*

[Sh7] SAHARON SHELAH. E-Mail vom 7. Oktober 1995. *(s. Anhang)*

Index

E-Mail von Saharon Shelah vom 7. Oktober 1995

```
Return-Path: <shelah@lagrange.rutgers.edu>
Delivery-Date: Sat, 7 Oct 1995 16:04:34 +0100
Received: from lagrange.rutgers.edu by mgate.uni-hannover.de
          with SMTP (PP);
          Sat, 7 Oct 1995 16:04:31 +0100
Received: (from shelah@localhost)
          by lagrange.rutgers.edu
          (8.6.12+bestmx+oldruq+newsunq+grosshack/8.6.12)
          id LAA28490; Sat, 7 Oct 1995 11:04:02 -0400
Date: Sat, 7 Oct 1995 11:04:02 -0400
From: Saharon Shelah <shelah@lagrange.rutgers.edu>
Message-Id: <199510071504.LAA28490@lagrange.rutgers.edu>
To: weitz@math.uni-hannover.de
Subject: Re: errata to cardinal arithmetic
Cc: shafir@math.huji.ac.il, shlhetal@sunrise.ma.huji.ac.il
Status:


SORRY I CANNOT PROOF READ MY CORRECTION< NOTE:
TEH___>THE<
first N should be N_i (incraesing continuous)
in def of M it is teh skolem hull of
\cup\{C_\b:\b<\a^*\}\cup\l_0
also: \a,\b\l  are teh greek
***********************
CORRECTION TO [Sh:g,II, Th. 3.6 p. 66]

second line of Th:
replace $\l^{\b+1}$  by  $\l_0^{\b+1}

add after the remark:
```

2) This is essetially the proof from
[Sh:b]XIII,\S6, and more appear in Ch. X

add after : Remark 3.6A
1)

first line of the proof:
replace $\l>\aleph_0$ by
$\l_0 > |\a|^+ $ (why? as we can replace$\l_0$ by
$\l_0^+$ and deduce the result on the original $\l_0$
from the result on $\l_0^+$)

in first line of teh theorm, second line of teh theorem
and first line of proof:
replace $\a$ by $\a^+$

second line of teh proof:
replace $\a$ by $\a^+$

add in teh end of teh proof:

Clearly this family is a famliy of subsets of $\l$
each of cardinality at most $\l_0$ of teh right
cardinality. So we have to prove just that it is
confinal. So let X be a subset of $\l$ of cardinality
at most $\l_0$, and we shall find a member of teh
family which include it. Let χ be large enough.
By 3.4 we can find an elemntary submodel N of
$(H(\chi), \in, <^*_\chi)$, each of cardinality
$\l_0$, for $i \le \d =: |\a^*|^+$
such that $\{ F,\l_0, \a^*,\l, X, f,g \} \in N_i$
and $i<j \rarrow N_i \in N_j $
and condition (b) form 3.4 holds for $f \in F $.

It is enough to prove that
(*) N_f include N_\d \cap \l

for this it is ehough to prove

(**) if $C_\b$ is a club of $\l_)^{\b+1}$ fo reach
$\b<\a^*$ and M is teh Skolem hull in M of
$\cup \{ C_\b : \b<\a^*\}$
then M include $N_d \cap \l$

FOr this we prove by induction on $\g \le \a^&$
that

(**)_$\g$ M include $\l \cap \l_0^\g$

case 1: $\g =0$
In this ase as M include $\l_0$ this is trivial

case 2: $\g$ a limit cardinal
ordianl

In this case the induction hypotyhesis implies teh
conclusion trivially

case 3: $\g=\b+1$
use teh induction hypothesis and teh choice of
teh functions f and g